

**№5 (124) 2012**  
**Выпуск 26**  
**НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ**

Основан в 1995 г.

**Журнал входит  
в Перечень ведущих рецензируемых  
научных журналов и изданий,  
выпускаемых в Российской Федерации,  
в которых рекомендуется публикация  
основных результатов диссертаций  
на соискание ученых степеней  
доктора и кандидата наук**

**Учредитель:**  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Белгородский  
государственный национальный  
исследовательский университет»  
(НИУ «БелГУ»)

**Издатель:**  
НИУ «БелГУ».  
Издательско-полиграфический комплекс  
НИУ «БелГУ»

Журнал зарегистрирован  
в Федеральной службе по надзору за соблюдением  
законодательства  
в сфере массовых коммуникаций  
и охраны культурного наследия  
Свидетельство о регистрации средства массовой  
информации ПИ № ФС 77-21121 от 19 мая 2005 г.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
ЖУРНАЛА**

Главный редактор

**Л.Я. Дятченко,**

ректор Белгородского государственного  
университета,  
доктор социологических наук,  
профессор

Зам.главного редактора

**В.В. Сокорев,**

проректор по научной работе  
Белгородского государственного  
университета, кандидат  
педагогических наук

Ответственные секретари

**В.М. Московкин,**

доктор географических наук, профессор  
кафедры мировой экономики  
Белгородского государственного  
университета

**Е.Н. Кролевецкая,**

доцент кафедры педагогики  
Белгородского государственного  
университета, кандидат  
педагогических наук

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор

**Ю.П. Вирченко**

доктор физико-математических  
наук (Белгородский  
государственный университет)

**НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ**

**Белгородского государственного университета**

**Математика Физика**

**Belgorod State University**

**Scientific bulletin**

**Mathematics & Physics**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Средние значения отклонений для распределения на торе.  
**А.А. Абросимова 5**

Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической  
области для вырождающихся многомерных  
гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина.  
**С.А. Алдашев 12**

Новый метод вычисления верхней оценки порога  
перколяции в задаче узлов на квадратной решетке.  
**Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко 26**

Об асимптотическом поведении решений нелинейных  
дифференциальных уравнений с комплексными  
коэффициентами. **И.В. Асташова 33**

Топологическая степень многозначных возмущений плотно  
определенных операторов монотонного типа и некоторые  
ее приложения. **Е.С. Барановский 47**

Приближенное решение задачи об оптимальном выборе  
источников тепла. **А.Г. Брусенцев, О.В. Осипов 60**

Неустойчивость Рэля-Тейлора в задаче Маскета со  
свободной границей. **О.В. Гальцев 70**

Математические модели на основе СИУ 2D задач дифракции  
на многослойных периодических отражающих структурах.  
Часть II. . Случай Н-поляризации. **Ю.В. Гандель,  
В.Д. Душкин 88**

Нелокальная задача для гиперболического уравнения с  
интегральным условием первого рода. **А.В. Дюжева,  
Л.С. Пулькина 107**

Корректная разрешимость задачи о нелинейной диффузии в  
несжимаемой пороупругой среде на микроскопическом  
уровне. **А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцев,  
О.А. Гальцева 116**

Заместители главного редактора

**Н.В. Малай**

доктор физико-математических наук  
(Белгородский государственный  
университет)

**А.М. Мейрманов**

доктор физико-математических наук,  
профессор (Белгородский  
государственный университет)

Ответственный секретарь

**М.Н. Бекназаров**

кандидат физико-математических наук  
(Белгородский государственный  
университет)

Члены редколлегии

**С.В. Блажевич**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**И.Е. Внуков**, доктор физико-  
математических наук (Белгородский  
государственный университет)

**А.В. Глушак**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**С.А. Гриценко**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**В.В. Красильников**, доктор  
физико-математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**Н.Н. Насонов**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**О.М. Пенкин**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**Г.А. Салищев**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**А.П. Солдатов**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**В.В. Сыщенко**, доктор физико-  
математических наук (Белгородский  
государственный университет)

Редактор *Т.Г. Лагутина*  
Компьютерная вёрстка  
*Ю.П. Вирченко, Ю.А. Лазебная*

E-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)  
Подписано в печать 00.03.2012  
Формат 60×84/8  
Гарнитура Georgia  
Усл. п. л. 29,99  
Тираж 1000 экз.  
Заказ 181

Подписные индексы в каталоге агентства  
«Роспечать» – 81631,  
в объединенном каталоге  
«Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован  
в издательстве Белгородского  
государственного университета  
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

О корректности математических моделей  
гидродинамического удара в слабо вязкой жидкости и  
пороупругом скелете. **И.В. Некрасова 129**

Об осцилляциях, порождаемых оператором взаимодействия  
в дискретных кинетических уравнениях.  
**Радкевич Е.Н. 147**

Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с  
неизвестной правой частью. **Г.Ю. Удалова 209**

Явный вид решения задачи Коши для одномерного  
уравнения движения грунтовых вод. **Х.Г. Умаров 226**

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Бинарная аддитивная задача с простыми числами  
специального вида. **Н.А. Зинченко 236**

Пифагоровы и фибоначевы тройки. **А.В. Лантев 240**

Некоторые формулы среднего для дифференциальных  
уравнений со спектральным параметром.  
**И.П. Половинкин 245**

Операция В-лиувиллевского типа.  
**А.А. Феоктистова 249**

Перколяция однородного бернуллиевского поля на  
бесконечномерной решетке. **Ю.П. Вирченко 255**

Сведения об авторах **278**

Информация для авторов **283**

**№5 (124) 2012  
Issue 26**

Belgorod State University  
Scientific bulletin  
**Mathematics & Physics**

Founded in 1995

The Journal is included into the list of the leading peer-reviewed journals and publications coming out in the Russian Federation that are recommended for publishing key results of the theses for Doktor and Kandidat degree-seekers.

**НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ  
Белгородского государственного университета  
Математика Физика**

**Founder:**

Federal state autonomous educational establishment of higher professional education  
«Belgorod National Research University»

**Publisher:**

Belgorod National Research University.  
Belgorod National Research University Press  
The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media  
ПИ № ФС 77-21121 May 19, 2005.

**EDITORIAL BOARD OF JOURNAL**

Editor-in-chief

**L.J. Djatchenko,**  
Rector of Belgorod National Research University, Doctor of sociological sciences, professor

Deputy editor-in-chief

**V. V. Sokorev,**  
Vice-rector for scientific research of Belgorod National Research University, Candidate of pedagogical sciences

Assistant Editors

**V.M. Moskovkin,**  
Professor of world economy department Belgorod National Research University, Doctor of geographical sciences

**E.N. Krolevetskaya,**  
Associate professor of Pedagogics department of Belgorod National Research University, Candidate of pedagogical sciences

**Editorial board of journal series**

Editor-in-chief

**Yu.P. Virchenko**  
Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

CONTENTS

Average values for deviation distribution of points on the torus.  
**A.A. Abrosimova 5**

Correctness of Dirichlet's and Poincare's problems in cylindrical domain for degenerated multidimensional hyperbolic equations with Chaplygin's operator . **S.A. Aldashev 12**

New method of upper estimate calculation of percolation threshold on square lattice in site problem. **E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko 26**

On asymptotic behavior of solutions to nonlinear equations with complex coefficients. **I. V. Astashova 33**

Topological degree for multivalued  $I$  perturbations of densely defined operators of monotone type and its applications.  
**E.S. Baranovskii 47**

Approximate solution of the optimal choice problem of heat sources. **A.G. Brusentsev, O.V. Osipov 60**

The Rayley-Taylor instability for the Musket free boundary problem. **O.V. Galtsev 70**

Mathematical models based on SIE 2D diffraction problems on periodic multilayer reflective structures. Part II. H-Polarization case. **Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin 88**

Nonlocal problem for hyperbolic equation with first integral condition. **A.V. Duzheva, L.S. Pulkina 107**

Correctness of diffusion-convection mathematical model of admixture in poroelastic media on microscopic level.  
**A.M. Meirmanov, R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev 116**

About correctness of mathematical models of hydraulic shock inslghtly viscous liquid and elastic solid skeleton.  
**I.V. Nekrasova 129**

Oscillations generated by interaction operator in discrete kinetic equations. **E.V. Radkevich 147**

Deputies of editor-in-chief

**N.V. Malay**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**A.M. Meirmanov**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

Responsible secretary

**M.N. Beknazarov**

Candidate of physico-mathematical  
sciences (Belgorod State University)

Members of editorial board

**S.V. Blazhevich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**I.E. Vnukov**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**A.V. Glushak**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**S.A. Gritsenko**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**V.V. Krasilnikov**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**N.N. Nasonov**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**O.M. Penkin**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**G.A. Salishchev**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**A.P. Soldatov**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**V.V. Syshchenko**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

Editor *T.G. Lagutina*

Dummy layout by *Yu.P. Virchenko*,

*Y.A. Lazebnaya*

e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 00.03.2012

Format 60x84/8

Typeface Georgia

Printer's sheets 29,99

Circulation 1000 copies

Order 181

Subscription reference in Rospechat'

agency catalogue – 81631,

In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at

Belgorod State University Publishing House

Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia,

308015

Boundary problem for Lavrentyev-Bitsadze's equation with  
unknown right-hand part. **G.Y. Udalova 209**

Explicit solution of the Cauchy problem to the one-dimensional  
equation for groundwater motion with a free surface.

**Kh.G. Umarov 226**

**SHORT COMMUNICATIONS**

Binary additive problem with specific prime numbers.

**N.A. Zinchenko 236**

Pythagorean and Fibonacci's triples. **A.V. Laptev 240**

Some mean value formulas for differential equations with  
spectral parameter. **I.P. Polovinkin 245**

Operation B-Liouville type. **A.A. Feoktistova 249**

Percolation property of uniform Bernoulli field on infinite  
dimensional lattice. **Yu.P. Virchenko 255**

Information about Authors **278**

Information for Authors **283**



УДК 511.2

## СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК НА ТОРЕ

А.А. Абросимова

Владимирский государственный университет,  
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: [Pincet88@mail.ru](mailto:Pincet88@mail.ru)

**Аннотация.** В работе рассмотрен пример множеств ограниченного остатка на двумерном торе. Для этих множеств найдены оценки остаточного члена равномерного распределения, доказана формула для среднего значения остаточного члена.

**Ключевые слова:** множества ограниченного остатка, распределение дробных долей, развертка тора, перекладывающиеся фигуры.

**1. Введение.** Г.Вейль в работе [6] ввел понятие последовательности, равномерно распределенной по модулю 1, а также доказал критерий равномерного распределения. В той же работе были приведены первые примеры последовательностей, равномерно распределенных по модулю 1. Простейшей из таких последовательностей является последовательность  $(i\alpha)_{i \geq 1}$  при иррациональном  $\alpha$ .

Пусть  $X$  – некоторый интервал и  $r(\alpha, i, X) = \#\{j : 0 \leq j < i, \{j\alpha\} \in X\}$ , где  $\{x\}$  обозначает дробную долю. Тогда теорема Вейля о равномерном распределении эквивалентна асимптотической формуле  $r(\alpha, i, X) = i|X| + o(i)$ , где  $|X|$  – длина интервала  $X$ .

Пусть  $\delta(\alpha, i, X) = r(\alpha, i, X) - i|X|$  – остаточный член этой формулы. Множество  $X$  называется множеством ограниченного остатка, если существует  $C$  такое, что

$$|\delta(\alpha, i, X)| \leq C$$

для всех  $i$ . Первые примеры таких множеств были построены в работе Гекке [1], который доказал, что интервалы  $I$  длины вида  $a + b\alpha, a, b \in \mathbb{Z}$  являются интервалами ограниченного остатка и для них справедлива оценка

$$|\delta(\alpha, i, I)| \leq |b|.$$

Полное описание одномерных интервалов ограниченного остатка было найдено в [2], а в работе [11] были получены наилучшие по порядку оценки остаточного члена.

Более сложной является задача о множествах ограниченного остатка в двумерном случае. Известно только небольшое число таких множеств [3], [5], [8]. Большинство известных примеров строятся на основе результатов эргодической теории, что не позволяет получить явных оценок остаточного члена.



Целью данной работы является построение множеств ограниченного остатка в двумерном случае, получение явной оценки остатка или отклонения на этих множествах, а также определение средних значений отклонений для данных множеств.

Основные результаты, полученные в работе, были представлены в докладе на VIII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» [7].

Автор выражает благодарность В. Г. Журавлеву и А. В. Шутову за внимание к работе и стимулирующие обсуждения.

**2. Одномерный случай.** Рассмотрим поворот  $S_\alpha : x \rightarrow x + \alpha \pmod{1}$  единичной окружности  $C = \mathbb{T}^1$  на угол  $\alpha$ .

Окружности  $\mathbb{T}^1$  можно поставить в соответствие единичный полуинтервал  $T^1 = [0, 1)$ , который можно разбить на два полуинтервала  $T^1 = T_0^1 \sqcup T_1^1$ , где  $T_0^1 = [0, 1 - \alpha)$ ,  $T_1^1 = [1 - \alpha, 1)$ . Тогда повороту окружности  $\mathbb{T}^1$  на вектор  $\alpha$  будет соответствовать перекладывание полуинтервалов  $T_0$  и  $T_1$ :

$$S : T^1 \rightarrow T^1 : S(x) = x + v_k,$$

где  $x \in T_k^1$ ,  $k = 0, 1$ ,  $v_0 = \alpha$ ,  $v_1 = \alpha - 1$ .

Определим счетные функции  $r_0(i)$  и  $r_1(i)$  соответственно для полуинтервалов  $T_0$  и  $T_1$

$$r_0(i) = \#\{j; \{j\alpha\} < 1 - \alpha, 0 \leq j < i\}, r_1(i) = \#\{j; \{j\alpha\} \geq 1 - \alpha, 0 \leq j < i\},$$

где  $\{x\}$  обозначает дробную часть числа  $x$ . Рассмотрим отклонения  $\delta_k(i)$  счетных функций  $r_k(i)$ ,  $k = 0, 1$  от ожидаемой величины :

$$\delta_0(i) = r_0(i) - i(1 - \alpha), \quad \delta_1(i) = r_1(i) - i\alpha.$$

В этом случае теорема Гекке [1] дает следующую оценку

$$|\delta_0(i)| \leq 1, \quad |\delta_1(i)| \leq 1$$

для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$

**3. Двумерный случай.** В качестве аналога единичной окружности рассмотрим единичный тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2.$$

Будем сдвигать его на вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$S_\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 : x \mapsto S_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^2}. \quad (1)$$

Определим развертку тора. Любой точке  $c = (c_1, c_2)$  из области  $C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \geq 0, \min(c_1, c_2) \leq 1\}$  поставим в соответствие шестиугольник  $T_c$  с координатами вершинам  $(0, 0)$ ,  $(-c_1, 1 - c_2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1 - c_1, 1 - c_2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1 - c_1, -c_2)$  (рис. 1).

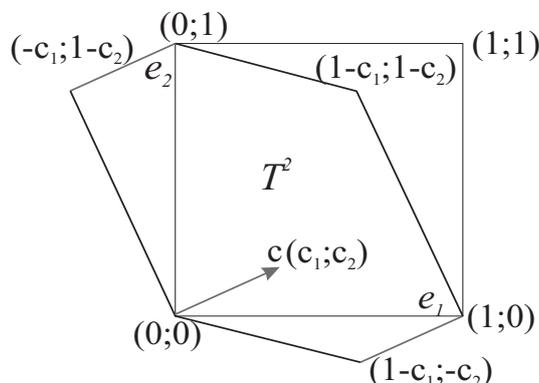


Рис. 1.

У шестиугольника  $T^2$  противоположные стороны параллельны и, если  $c_1 + c_2 \leq 1$ , то он выпуклый.

Параллельными переносами на векторы  $l$  из квадратной решетки  $\mathbb{Z}^2$  шестиугольником  $T^2$  можно замостить  $\mathcal{J} = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^2} T^2[l]$  плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Таким образом шестиугольник  $T^2$  является фундаментальной областью для квадратной решетки  $\mathbb{Z}^2$  и его можно рассматривать как развертку тора  $\mathbb{T}^2$ .

Вектор  $\alpha$  в данном случае будем выбирать такой, что  $\alpha = tc$ , где  $0 < t < 1$ . Сдвигая разбиение  $\mathcal{J}$  на вектор  $-\alpha$ , при этом сама область  $T^2$  остается неподвижной, получим ее разбиение на три фигуры: шестиугольник  $T_0^2$  и два параллелограмма  $T_1^2$  и  $T_2^2$ , - с площадями соответственно

$$a_0 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_0, \quad a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2. \tag{2}$$

Фигура  $T^2$  будет являться перекладывающейся разверткой тора (рис. 2), т.е. существует преобразование

$$S_v : T^2 \rightarrow T^2 : x \rightarrow S_v(x) = x + v_k, \tag{3}$$

где  $v_k$  - вектора перекладывания для областей  $T_k^2$ ,  $k=0, 1, 2$ , и они соответственно равны

$$v_0 = (\alpha_1, \alpha_2), \quad v_1 = (\alpha_1 - 1, \alpha_2), \quad v_2 = (\alpha_1, \alpha_2 - 1). \tag{4}$$

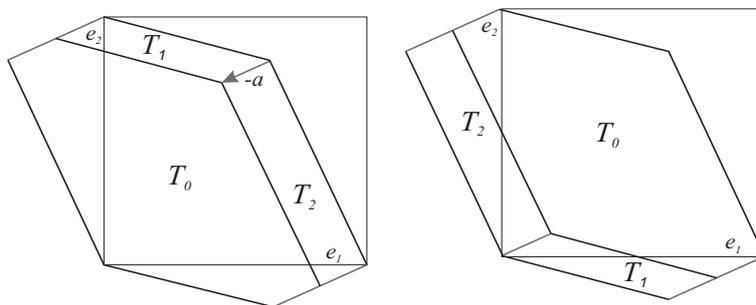


Рис. 2.

**Предложение 1.** Пусть дан сдвиг тора  $S_\alpha$ , определяемый выражением (1), и пусть для развертки тора разбитой на области  $T^2 = T_0^2 \sqcup T_1^2 \sqcup T_2^2$  с площадями (2) задано перекладывание (3). Тогда выполняется равенство

$$S_v(T^2) = S_\alpha(\mathbb{T}^2) \bmod \mathbb{Z}^2. \tag{5}$$



□ Так как преобразование  $S_v$  отображает шестиугольник  $T^2$  на себя, то для доказательства предложения достаточно доказать, что для любого  $x \in T^2$  точки  $S_v(x)$  и  $x + \alpha$  различаются на векторы решетки  $\mathbb{Z}^2$ .

$$S_v(x) - (x + \alpha) = \begin{cases} 0, & x \in T_0^2; \\ l_1, & x \in T_1^2; \\ l_2, & x \in T_2^2, \end{cases}$$

где  $l_1(-1, 0), l_2(0, -1) \in \mathbb{Z}^2$ . Получили требуемый результат. ■

Определим теперь для каждой области  $T_k^2$ , где  $k = 0, 1, 2$ , счетные функции

$$r_k(i) = \#\{j : S_\alpha^j(0) \in T_k^2, 0 \leq j < i\},$$

по аналогии с одномерным случаем, и отклонения  $\delta_k(i)$  счетных функций  $r_k(i)$  от ожидаемой величины  $ia_k$ , где  $a_k$  – площадь области  $T_k^2$

$$\delta_k(i) = r_k(i) - ia_k. \quad (6)$$

Относительно отклонений в двумерном случае доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть дан сдвиг тора  $S_\alpha$  на иррациональный вектор  $\alpha$ , т.е. числа  $\alpha_1, \alpha_2, 1$  линейно независимы над  $\mathbb{Z}$ . Пусть тор  $\mathbb{T}^2$  разбит на области  $\mathbb{T}_k^2$ :  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \sqcup \mathbb{T}_2^2$ . Тогда для отклонений выполняются неравенства:

$$-c_1 - c_2 \leq \delta_0(i) \leq 2, \quad -1 \leq \delta_1(i) \leq c_1, \quad -1 \leq \delta_2(i) \leq c_2. \quad (7)$$

□ Функции  $r_k(i)$  можно рассматривать, как количество попаданий точек  $S_\alpha^j(0), 0 \leq j < i$  в область  $T_k^2$ , и их сумма равна

$$r_0(i) + r_1(i) + r_2(i) = i. \quad (8)$$

Так как развертка  $T^2$  является перекладывающейся, то

$$r_0(i)v_0 + r_1(i)v_1 + r_2(i)v_2 \in T^2.$$

Найдем проекции данного соотношения на направления задаваемые векторами  $e_1$  и  $e_2$  соответственно

$$\begin{aligned} -c_1 &\leq (r_0(i) + r_2(i))\alpha_1 - r_1(i)(1 - \alpha_1) \leq 1, \\ -c_2 &\leq (r_0(i) + r_1(i))\alpha_2 - r_2(i)(1 - \alpha_2) \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Неравенства (7) получаются при решении системы неравенств (9) с учетом соотношений (6) и (8). ■



Таким образом, границы отклонений  $\delta_k(i)$  не зависят не только от  $i$ , но и от вектора сдвига, а определяются только размерами развертки  $T^2$ . Теорема 2 является двумерным обобщением теоремы Гекке, а области  $T_k^2$ , где  $k = 0, 1, 2$  – множествами ограниченного остатка относительно сдвига на вектор  $\alpha$ .

**4. Средние значения отклонений.** Для нахождения средних значений отклонений введем понятие векторной дробной части  $Fr(x)$  и суммарного векторного отклонения  $\delta(i)$ .

Определим для любого  $x \in \mathbb{R}^2$  векторную дробную часть  $Fr(x)$ , полагая  $Fr(x) = x'$ , где  $x' = x \bmod \mathbb{Z}^2$  и  $x' \in T^2$  [10].

Суммарное векторное отклонение определим, как векторнозначную функцию

$$\delta(i) = r_0(i)v_0 + r_1(i)v_1 + r_2(i)v_2 \tag{10}$$

для  $i = 0, 1, 2, \dots$

Из равенств (4) и (8) следует, что (10) примет вид

$$\delta(i) = i\alpha + r_1(i)l_1 + r_2(i)l_2. \tag{11}$$

**Предложение 2.** *Справедливо равенство*

$$\delta(i) = Fr(i\alpha). \tag{12}$$

□ Рассмотрим перекладывание (3). Тогда

$$S_v^i = i\alpha + r_1(i)v_1 + r_2(i)v_2,$$

т.е.

$$S_v^i = \delta(i).$$

Из этого равенства, предложения 1 и определения векторной дробной части следует соотношение (12). ■

Определим среднее значение векторного отклонения

$$\langle \delta \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(i), \tag{13}$$

если предел существует.

Относительно средних значений отклонений доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть дан сдвиг тора на вектор  $\alpha$ . Пусть вектор  $\alpha$  иррациональный, т.е. числа  $\alpha_1, \alpha_2, 1$  линейно независимы над  $\mathbb{Z}$ . Тогда:*

1. *Существует среднее значение  $\langle \delta \rangle$  (13) векторного отклонения  $\delta(i)$ , и оно вычисляется по формуле*

$$\langle \delta \rangle = C_{T^2}, \tag{14}$$



где  $C_{T^2} = C_{T^2}((1 - c_1)/2, (1 - c_2)/2)$  – центр тяжести фигуры  $T^2$ .

2. Для любого  $k = 0, 1, 2$  существуют средние значения отклонений

$$\langle \delta_k \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_k(i),$$

и они соответственно равны

$$\langle \delta_0 \rangle = \frac{c_1 + c_2}{2} - 1, \quad \langle \delta_1 \rangle = \frac{1 - c_1}{2}, \quad \langle \delta_2 \rangle = \frac{1 - c_2}{2}. \quad (15)$$

□ Из формулы (12) следует

$$\sum_{1 \leq i \leq N} \delta(i) = \sum_{1 \leq i \leq N} Fr(i\alpha). \quad (16)$$

Для доказательства (14) воспользуемся формулой (16) и критерием Вейля

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} Fr(i\alpha) = \int_{T^2} x dx = C_{T^2}.$$

Для доказательства формулы (15) найдем проекции векторного отклонения  $\delta(i)$  (11) на направления векторов  $e_1$  и  $e_2$  и воспользуемся формулой (14). ■

### Литература

1. Hecke E., Über Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. – 1921. – 1. – P.54-76.
2. Kesten H. On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. – 1966. – 12. – P.193-212.
3. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. – 1987. – 61. – P.267-293.
4. Oren I. Admissible functions with multiple discontinuities // Israel J.Math. – 1982. – 42. – P.353-360.
5. Rauzy G. Nombres algè 0 briques et substitutions // Bull. Soc. Math. France – 1982/ – 110. – P.147-178.
6. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.
7. Абросимова А.А., Журавлев В.Г. Двумерное обобщение теоремы Гекке и сбалансированные слова / Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12-17 сентября 2011 г.) / Саратов: Изд-во Саратов.унта, 2011. – С.3-4.
8. Журавлев В.Г. Разбиения Розы и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2005. – 322. – С.83-106.



9. Журавлев В.Г., Геометризация теоремы Гекке // Чебышевский сборник. – 2010. – 11;1. – С.125-144.
10. Журавлев В.Г. Многомерное обобщение теоремы Гекке // Алгебра и анализ. – 2012. – 24;1. – С.1-33.
11. Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – 5;3. – С.112-121.

#### AVERAGE VALUES FOR DEVIATION DISTRIBUTION OF POINTS ON THE TORUS

A.A. Abrosimova

Vladimir State University,

Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: [Pincet88@mail.ru](mailto:Pincet88@mail.ru)

**Abstract.** New examples of bounded remainder sets on two-dimensional torus are under consideration. For these sets we prove estimates of the remainder term of the uniform distribution problem. We also prove the exact formula for the average value of remainder term.

**Key words:** bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development, exchanged domains.



УДК 517.956

**КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ  
МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА**

С.А. Алдашев <sup>1)</sup>

Научный институт прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова,  
ул. Братьев Жубановых, 256, Актобе, Казахстан, e-mail: [aldash51@mail.ru](mailto:aldash51@mail.ru)

**Аннотация.** В работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина имеют единственное решение.

**Ключевые слова:** задачи Дирихле и Пуанкаре, корректность, вырождение, многомерные уравнения.

В [1] было показано, что на плоскости одна из фундаментальных задач математической физики – изучение поведения колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как замечено в [2,3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4] показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем, эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], которые неэффективны в приложениях.

В пространстве [6,7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений, а [8,9] доказаны корректность задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Насколько нам известно, многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре для вырождающихся гиперболических уравнений ранее не изучались.

В настоящей работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина имеют единственное решение.

**1. Постановка задач и результаты.** Пусть  $D_\beta$  – цилиндрическая область евклидова пространства  $E_{m+1}$  точек  $(x_1, \dots, x_m, t)$ , ограниченная цилиндром  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \beta > 0$  и  $t = 0$  где  $|x|$  – длина вектора  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial D_\beta$  области  $D_\beta$ , обозначим через  $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$  соответственно.

В области  $D_\beta$  рассмотрим взаимно-сопряженные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0, \quad (1)$$

<sup>1)</sup>Алдашев С.А., док.физ.-мат. наук, проф. Института прикладной математики и информатики при АГУ.



$$L^*v \equiv g(t)\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \tag{1^*}$$

где  $g(t) > 0$  при  $t > 0$ , и может обращаться в нуль при  $t = 0$ ,  $g(t) \in C([0, \beta]) \cap C^2((0, \beta))$ ,  $\Delta_x$  – оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_m$ ,  $m \geq 2$ , а  $d(x, t) = c - \sum_{i=1}^m a_i x_i - b t$ .

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат  $x_1, \dots, x_m, t$  к сферическим  $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ,  $i = 2, 3, \dots, m - 1$ .

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** Найти решения уравнения (1) в области  $D_\beta$ , который находятся в классе  $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$  и удовлетворяют краевым условиям

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \quad u|_{S_0} = \tau(r, \theta), \tag{2}$$

или

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \quad u_t|_{S_0} = \nu(r, \theta). \tag{3}$$

Пусть  $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$  – система линейно независимых сферических функций порядка  $n$ ,  $1 \leq k \leq k_n$ ,  $(m - 2)!n!k_n = (n + m - 3)!(2n + m - 2)$ ,  $W_2^l(S_0)$ ,  $l = 0, 1, \dots$  – пространства Соболева.

Имеет место ([10])

**Лемма 1.** Пусть  $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$ . Если  $l \geq m - 1$ , то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка  $p \leq l - m + 1$ , сходятся абсолютно и равномерно.

**Лемма 2.** Для того, чтобы  $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$ , необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Через  $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$ ,  $a_{in}^k(r, t)$ ,  $\tilde{b}_n^k(r, t)$ ,  $\tilde{c}_n^k(r, t)$ ,  $\tilde{d}_n^k(r, t)$ ,  $\rho_n^k$ ,  $\tilde{\varphi}_n^k(r)$ ,  $\psi_n^k(t)$ ,  $\tilde{\tau}_n^k(r)$ ,  $\tilde{\nu}_n^k(r)$ , обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций  $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$ ,  $a_i \frac{x_i}{r} \rho$ ,  $b(r, \theta, t)\rho$ ,  $c(r, \theta, t)\rho$ ,  $d(r, \theta, t)\rho$ ,  $\rho(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\varphi(r, \theta)$ ,  $\psi(t, \theta)$ ,  $\tau(r, \theta)$ ,  $\nu(r, \theta)$ , причем  $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ ,  $H$  – единичная сфера в  $E_m$ .

Пусть  $a_i(r, \theta, t)$ ,  $b(r, \theta, t)$ ,  $c(r, \theta, t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta)$ ,  $l \geq m + 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда справедлива



**Теорема.** Если  $\varphi(r, \theta) \in W_2^p(S_\beta)$ ,  $\psi(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$ ,  $\tau(r, \theta)$ ,  $\nu(r, \theta) \in W_2^p(S_0)$ ,  $p > \frac{3m}{2}$  и выполняется условие

$$\cos \mu_s \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то задача 1 имеет единственное решение, где  $\mu_{s,n}$  – положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$ ,  $\beta' = \int_0^\beta \sqrt{g(\xi)} d\xi$ .

**2. Разрешимость задачи 1.** В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv g(t) \left( u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2} \right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0, \quad (6)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно ([10]), что спектр оператора  $\delta$  состоит из собственных чисел  $\lambda_n = n(n+m-2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , каждому из которых соответствует  $k_n$  ортонормированных собственных функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$ .

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (7)$$

где  $\bar{u}_n^k(r, t)$  – функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6), умножив затем полученное выражение на  $\rho(\theta) \neq 0$  и проинтегрировав по единичной сфере  $H$ , для  $\bar{u}_n^k$  получим ([11,12])

$$\begin{aligned} & g(t) \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left( \frac{m-1}{r} g(t) \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ g(t) \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left( \frac{m-1}{r} g(t) \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ & \left. + \left[ \tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} g(t) + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t) \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} g(t) \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (9)$$



$$g(t)\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} g(t)\rho_1^k \bar{u}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1} \left( \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t} + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (10)$$

$$g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} g(t)\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} g(t)\rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$-\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \left[ \tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad (11)$$

$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Суммируя уравнение (10) от 1 до  $k_1$ , а уравнение (11) – от 1 до  $k_n$ , затем сложив полученные выражения вместо с (9), приходим к уравнению (8).

Отсюда следует, что если  $\{\bar{u}_n^k\}$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  – решение системы (9)-(11), то оно является решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)-(11) можно представить в виде

$$g(t) \left( \bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \quad (12)$$

где  $f_n^k(r, t)$  определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом  $f_0^1(r, t) = 0$ .

Далее, из краевых условий (2) и (3), в силу (7), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, 0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, 0) = \tilde{\nu}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Выполнив в (12) замену  $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$  и положив затем  $r = r$ ,

$$y = \left( \frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi \right)^{\frac{2}{3}},$$

получим

$$y u_{nrr}^k - u_{nyy}^k + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2} u_n^k - b(y) u_{ny}^k = \bar{f}_n^k(r, y), \quad (15)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad b(y) = \frac{1}{2g} \left[ \frac{dg}{dy} - \frac{g}{y} \right], \quad \bar{f}_n^k(r, y) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \frac{f_n^k(r, t)}{y^2}.$$

Полагая  $u_n^k = \omega_n^k \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^y b(\xi) d\xi \right]$ , уравнение (15) приводим к виду

$$y \omega_{nrr}^k - \omega_{nyy}^k + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2} \omega_n^k = c(y) \omega_n^k + \bar{f}_n^k(r, y), \quad (16)$$



$$c(y) = -\frac{1}{4}(b^2 + 2b'_y) \in C(y > 0), \quad \tilde{f}_n^k(r, y) = \bar{f}_n^k(r, y) \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^y b(\xi) d\xi \right].$$

Уравнение (16), в свою очередь, с помощью замены переменных  $r = r$ ,  $x_0 = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$  переходит в уравнение

$$v_{nrr}^k - v_{nx_0x_0}^k - \frac{v_{nx_0}^k}{3x_0} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = g_n^k(r, x_0), \quad (17)$$

$$v_n^k(r, x_0) = \omega_n^k \left[ r, \left( \frac{3}{2}x_0 \right)^{\frac{2}{3}} \right],$$

$$g(r, x_0) = \left( \frac{3x_0}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left\{ \tilde{f}_n^k \left[ r, \left( \frac{3x_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + c \left[ \left( \frac{3x_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \omega_n^k \left[ r, \left( \frac{3x_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}.$$

При этом краевые условия (13) и (14) соответственно примут вид

$$v_n^k(r, \beta') = \varphi_n^k(r), \quad v_n^k(1, x_0) = \psi_n^k(x_0), \quad v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad (18)$$

$$v_n^k(r, \beta') = \varphi_n^k(r), \quad v_n^k(1, x_0) = \psi_n^k(x_0), \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial x_0} v_n^k = \nu_n^k(r), \quad (19)$$

$$\varphi_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\varphi}_n^k(r) \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\beta}} b(\xi) d\xi \right], \quad \tilde{\beta} = \left( \frac{3}{2} \int_0^{\beta} \sqrt{g(\xi)} d\xi \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\psi_n^k(x_0) = \psi_n^k(t) \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^y b(\xi) d\xi \right], \quad \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\nu}_n^k(r).$$

Наряду с уравнением (17) рассмотрим уравнение

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k \equiv v_{\alpha,nrr}^k - v_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} v_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r, x_0), \quad (20_\alpha)$$

$$L_0 v_{0,n}^k \equiv v_{0,nrr}^k - v_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_{0,n}^k = g_{0,n}^k(r, x_0), \quad (20_0)$$

$$g_{\alpha,n}^k(r, x_0) = \left( \frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{-2\alpha} \left\{ \tilde{f}_n^k \left[ r, \left( \frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right] + c \left[ \left( \frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right] v_{\alpha,n}^k \left[ r, \left( \frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right] \right\},$$

$$g_{0,n}^k(r, x_0) = \tilde{f}_n^k(r, x_0) + c(x_0) v_{0,n}^k(r, x_0), \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1.$$

Отметим, что уравнение (17) совпадает с уравнением (20<sub>α</sub>) при  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

Как показано в [11, 12] (см. также [13]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнения (20<sub>α</sub>) и (20<sub>0</sub>).



**Утверждение 1.** Если  $v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши для уравнения (20<sub>0</sub>), удовлетворяющее условиям

$$v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (21)$$

то функция

$$v_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv 2^{-1} \gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[ \frac{v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0^2} \right] \quad (22)$$

при  $\alpha > 0$  является решением уравнения (20<sub>α</sub>) с данными (21).

**Утверждение 2.** Если  $v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши для уравнения (20<sub>0</sub>), удовлетворяющее условиям

$$v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{v_n^k(r)}{(1 - \alpha)(3 - \alpha) \dots (2q + 1 - \alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (23)$$

то при  $0 < \alpha < 1$  функция

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) = \gamma_{2-k+2q} \left( \frac{1}{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^q \left[ x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \equiv \\ \equiv \gamma_{2-k+2q} 2^{q-1} \Gamma\left(q - \frac{\alpha}{2} + 1\right) D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1} \left[ \frac{v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0} \right] \quad (24)$$

является решением уравнения (20<sub>α</sub>) с начальными данными

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) = v_n^k(r), \quad (25)$$

где  $\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция,  $D_{0t}^\alpha$  – оператор Римана-Лиувилля ([14]), а  $q \geq 0$  – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству  $2 - \alpha + 2q \geq m - 1$ .

При этом функции  $g_{\alpha,n}^k(r, x_0)$ ,  $g_{0,n}^k(r, x_0)$  связаны формулами (22) в случае утверждения 1 и формулами (24) в случае утверждения 2.

Теперь переходим к решению задачи (20<sub>α</sub>), (18) и (20<sub>α</sub>), (19). Решение задачи (20<sub>α</sub>), (18) будем искать в виде

$$v_{\alpha,n}^k(r, x_0) = v_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0) + v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0), \quad (26)$$

где  $v_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши (20<sub>α</sub>), (21), а  $v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$  – решение краевой задачи для уравнения

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^{k,2} = \left( \frac{x_0}{1 - \alpha} \right)^{-2\alpha} c \left[ \left( \frac{x_0}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \right] v_{\alpha,n}^{k,2}, \quad (20'_\alpha)$$



с данными

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta') = \varphi_n^k(r) - v_{\alpha,n}^{k,1}(r, \beta'), \quad v_{\alpha,n}^{k,2}(1, x_0) = \psi_n^k(x_0) - v_{\alpha,n}^{k,1}(1, x_0), \quad v_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0. \quad (27)$$

Учитывая формулы (22), (24), а также обратимость оператора  $D_{0t}^\alpha$  ([14]) задачи (20 $_\alpha$ ), (21) и (20' $_\alpha$ ), (27), соответственно сводим к задаче Коши (20 $_0$ ), (21), имеющее единственное решение ([12, 15]) и к задаче для уравнения

$$L_0 v_{0,n}^{k,1} = c(x_0) v_{0,n}^{k,1}, \quad (20'_0)$$

с условием

$$v_{0,n}^{k,1}(r, \beta') = \varphi_{1n}^k(r), \quad v_{0,n}^{k,1}(1, x_0) = \psi_{1n}^k(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (28)$$

где  $\varphi_{1n}^k(r)$ ,  $\psi_{1n}^k(x_0)$  – функции, вырождающиеся, соответственно через  $\varphi_n^k(r)$ ,  $\tau_n^k(r)$  и  $\psi_n^k(x_0)$ ,  $\tau_n^k(r)$ .

Произведя замену  $\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r, x_0) = v_{0,n}^{k,1}(r, x_0) - \psi_{1n}^k(x_0)$  задачу (20' $_0$ ), (28) приведем к следующей задаче

$$L\bar{v}_{0,n}^{k,1} \equiv \bar{v}_{0,n}^{k,1} - \bar{v}_{0,n}^{k,1} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \bar{v}_{0,n}^{k,1} = \bar{g}_{0,n}^k(r, x_0), \quad (29)$$

$$\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r, \beta') = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{v}_{0,n}^{k,1}(1, x_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \bar{v}_{0,n}^{k,1} = -\psi_{1n}^k(x_0) = c_0, \quad (30)$$

$$\bar{g}_{0,n}^k(r, x_0) = c(x_0) \bar{v}_{0,n}^{k,1}(r, x_0) + \psi_{1n}^k(x_0) - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \psi_{1n}^k, \quad \bar{\varphi}_{1n}^k(r) = \varphi_{1n}^k(r) - \psi_{1n}^k(\beta').$$

Решение задачи (29), (30) ищем в виде

$$\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r, x_0) = \omega_{1n}^k(r, x_0) + \omega_{2n}^k(r, x_0), \quad (31)$$

где  $\omega_{1n}^k(r, x_0)$  – решение задачи

$$L\omega_{1n}^k = \bar{g}_{0,n}^k r, x_0 = c_0 \omega_{1n}^k + \psi_{1n}^k(x_0) - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \psi_{1n}^k, \quad (32)$$

$$\omega_{1n}^k(r, \beta') = 0, \quad \omega_{1n}^k(1, x_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{1n}^k(r, 0) = 0, \quad (33)$$

а  $\omega_{2n}^k(r, x_0)$  – решение задачи

$$L\omega_{2n}^k = c(x_0) \omega_{2n}^k, \quad (34)$$

$$\omega_{2n}^k(r, \beta') = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \omega_{2n}^k(1, x_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{2n}^k(r, 0) = c_0. \quad (35)$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\omega_n^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(x_0), \quad (36)$$



при этом пусть

$$\tilde{g}_{0,n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(x_0)R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r), \quad c_0 = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}R_s(r). \quad (37)$$

Подставляя (36) в (32), (33), с учетом (37), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (38)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (39)$$

$$T_{sx_0x_0} + \mu T_s(x_0) = -a_{s,n}(x_0), \quad 0 < x_0 < \beta, \quad (40)$$

$$T_s(\beta') = 0, \quad T_{sx_0}(0) = 0. \quad (41)$$

Ограниченным решением задачи (38), (39) является (см. [16])

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (42)$$

где  $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$ ,  $\mu = \mu_{s,n}^2$ .

Общее решение уравнения (40) представимо в виде (см. [16])

$$T_{s,n}(x_0) = c_{1s} \cos \mu_{s,n}x_0 + c_{2s} \sin \mu_{s,n}x_0 + \frac{\cos \mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}} \int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi d\xi - \\ - \frac{\sin \mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}} \int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi d\xi,$$

$c_{1s}, c_{2s}$  – произвольные постоянные, удовлетворив второму условию условия (41) будем иметь

$$\mu_{s,n}T_{s,n}(x_0) = c_{1s} \cos \mu_{s,n}x_0 + \cos \mu_{s,n}x_0 \int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi d\xi - \\ - \sin \mu_{s,n}x_0 \int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi d\xi. \quad (43)$$

Подставляя (42) в (37) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{g}_{0,n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(x_0)J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \\ r^{-\frac{1}{2}}c_0 = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1. \quad (44)$$



Ряды (44) – разложения в ряды Фурье-Бесселя ([17]), если

$$a_{s,n}(x_0) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_{0,n}^k(\xi, x_0) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi =$$

$$2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \left[ c(x_0) \omega_n^k(\xi, x_0) + \psi_{1n x_0 x_0}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \psi_{1n}^k(x_0) \right] J_\nu(\mu_{s,n}\xi), \quad (45)$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad e_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 c_0 \sqrt{\xi} J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi.$$

Учитывая свойства ортогональности функций Бесселя (см. [17])

$$\int_0^1 \xi J_\nu(\mu_{s,m}\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}{2}, & n = m, \end{cases}$$

из (45), (36), (42) имеем равенство

$$a_{s,n}(x_0) = c(x_0) T_{s,n}(x_0) + 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \left[ \psi_{1n x_0 x_0}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2} \psi_{1n}^k(x_0) \right] J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi. \quad (46)$$

Подставляя (46) в (43) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$T_{s,n}(x_0) = f_{s,n}(x_0) + \int_0^{x_0} G_{s,n}(x_0, \xi) T_{s,n}(\xi) d\xi,$$

которое имеет единственное непрерывное решение (см. [18])

$$T_{s,n}(x_0) = f_{s,n}(x_0) + \int_0^{x_0} R_{s,n}(x_0, \xi; 1) f_{s,n}(\xi) d\xi, \quad (47)$$

где

$$\mu_{s,n} f_{s,n}(x_0) = c_{1s} \mu_{s,n} \cos \mu_{s,n} x_0 + 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^{x_0} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\eta} \left[ \psi_{1n \xi \xi}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{\eta^2} \psi_{1n}^k \right] J_\nu(\mu_{s,n}\eta) d\eta \right\} \sin \mu_{s,n}(\xi - x_0) d\xi, \quad (48)$$

$\mu_{s,n} G_{s,n}(x_0, \xi) = c(\xi) \sin \mu_{s,n}(\xi - x_0)$ ,  $R_{s,n}(x_0, \xi; 1)$  – резольвента ядра  $G_{s,n}(x_0, \xi)$ .



Из (47), (41) будем иметь

$$f_{s,n}(\beta') + \int_0^{\beta'} R_{s,n}(\beta', \xi; 1) f_{s,n}(\xi) d\xi = 0. \quad (49)$$

Далее, подставляя (48) в (49), при выполнении условий (5) однозначно определим постоянное  $c_{1s}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Таким образом, решением задачи (32), (33) является функция

$$\omega_{1n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(x_0) J_{\nu}(\mu_s r), \quad (50)$$

где  $T_{s,n}(x_0)$  находится из (47).

Теперь, подставляя (36) в (34), (35), с учетом (37), имеем задачу

$$\begin{aligned} V_{sx_0x_0} + \mu_{s,n}^2 V_s &= c(x_0) V_s, \\ V_s(\beta') &= b_{s,n}, \quad V_{sx_0}(0) = e_{s,n}, \end{aligned}$$

решение которого определяется по формуле (47), где

$$\mu_{s,n} f_{s,n}(x_0) = c_{1s} \mu_{s,n} \cos \mu_{s,n} x_0 + e_{s,n} \sin \mu_{s,n} x_0.$$

Из (47), (51), (49) при выполнении условия (5) определим постоянное  $c_{1s}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Следовательно, решение задачи (34), (35) записывается в виде

$$\omega_{2n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(x_0) J_{\nu}(\mu_s x_0). \quad (52)$$

Таким образом, единственным решением задачи (29), (30) является функция (31), где  $\omega_{1n}^k(r, x_0)$  определяется из (50), а  $\omega_{2n}^k(r, x_0)$  из (52).

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливается однозначная разрешимость задач  $(20_{\alpha})$ , (21) и  $(20_{\alpha})$ , (28). Значит, из (26) следует, что задача  $(20_{\alpha})$ , (18), также имеет единственное решение.

Теперь будем решать задачу  $(20_{\alpha})$ , (19) в виде (26), где  $v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$  – решение задачи Коши  $(20_{\alpha})$ , (25), а  $v_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи для  $(20_{\alpha})$  с данными

$$v_{\alpha,n}^{k,1}(r, \beta') = \varphi_n^k(r) - v_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta'), \quad v_{\alpha,n}^{k,1}(1, x_0) = \psi_n^k(x_0) - v_{\alpha,n}^{k,2}(1, x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{\alpha,n}^{k,1}(r, 0) = 0. \quad (53)$$

Используя формулы (24), (22), задачи  $(20_{\alpha})$ , (25) и  $(20_{\alpha})$ , (53) соответственно приведем к задаче Коши  $(20_0)$ , (23) и к задаче  $(20_0)$ , (28), где  $\varphi_{1n}^k(r)$ ,  $\psi_{1n}^k(x_0)$  – функций, теперь вырождающихся, соответственно через  $\varphi_n^k(r)$ ,  $\nu_n^k(r)$  и  $\psi_n^k(x_0)$ ,  $\nu_n^k(r)$ .

Таким образом, задача  $(20_{\alpha})$ , (19) также однозначно разрешима. Следовательно, сначала решив задачу (9), (13) ( $n = 0$ ), а затем (10), (13) ( $n = 1$ ) и т.д. найдем последовательно все  $v_{\alpha,n}^k(r, x_0)$  из (26), где  $v_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$ ,  $v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  определяются из двумерных задач.



Итак, в области  $D_\beta$ , имеет место

$$\int_H \rho(\theta) Lu dH = 0. \quad (54)$$

Пусть  $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ , причем  $R(r) \in V_0$ ,  $V_0$  плотна в  $L_2((0, 1))$ ,  $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ , плотной в  $L_2(H)$ , а  $T(t) \in V_1$ ,  $V_1$  плотна в  $L_2((0, \beta))$ . Тогда  $f(r, \theta, t) \in V$ ,  $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$  плотна в  $L_2(D_\beta)$  ([19]).

Отсюда и из (54), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r, \theta, t) Lu dD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи 1 является функция (7), где  $\bar{u}_n^k(r, t)$  находятся из задачи (8), (9) в случае задачи (1), (2) и из (8), (10) – в случае задачи (1), (3).

Учитывая формулу  $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$  ([17]), оценки ([20, 10])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (55)$$

а также леммы, которые дают ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции  $g(t)$ ,  $\varphi(r, \theta)$ ,  $\psi(t, \theta)$ ,  $\tau(r, \theta)$ ,  $\nu(r, \theta)$ , как в [11, 12], можно показать, что полученное решение (7) принадлежит искомому классу  $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ . Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

**3. Единственность решения задачи 1.** Сначала рассмотрим задачу (1), (2) и докажем ее единственность решения. Для этого построим решение задачи Дирихле для уравнения (1\*) с данными

$$v \Big|_{S_\beta \cup \Gamma_\beta} = 0, \quad v \Big|_{S_0} = \tau(r, \theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (56)$$

где  $\bar{\tau}_n^k(r) \in V$ ,  $V$  – множество функций  $\tau(r)$  из класса  $C^1([0, 1]) \cap C^2((0, 1))$ . Множество  $V$  плотно всюду в  $L_2((0, 1))$  [19]. Решение задачи (1\*), (55) будем искать в виде (7), где функции  $\bar{v}_n^k(r, t)$  будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции  $\bar{v}_n^k(r, t)$  удовлетворяют системы уравнений (9)-(11), где  $\tilde{a}_{in}^k$ ,  $a_{in}^k$ ,  $\tilde{b}_n^k$  заменены соответственно на  $-\tilde{a}_{in}^k$ ,  $-a_{in}^k$ ,  $-\tilde{b}_n^k$ , а  $\tilde{c}_n^k$  на  $\tilde{d}_n^k$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Далее, из краевого условия (56), в силу (7), получим

$$\bar{v}_n^k(r, \beta) = \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{v}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (57)$$



Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (9)-(11) представимо в виде (12). В п.2 показано, что задача (12), (57) имеет единственное решение, если выполнено соотношение (5).

Таким образом, решение задачи (1\*), (56) в виде ряда (7) построено, которая в силу оценок (55) принадлежит классу  $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ .

Из определения сопряженных операторов  $L, L^*$  ([21]) имеем

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = g(t) \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i) - u_t \cos(N^\perp, t), Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos(N^\perp, x_i) - b \cos(N^\perp, t),$$

а  $N^\perp$  – внутренняя нормаль к границе  $\partial D_\beta$ , по формуле Грина имеем

$$\int_{D_\beta} (vLu - uL^*v) dD_\beta = \int_{\partial D_\beta} \left[ \left( v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) M + uvQ \right] ds, \quad (58)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = g(t) \sum_{i=1}^m \cos(N^\perp, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos(N^\perp, t) \frac{\partial}{\partial t}, \quad M^2 = g^2 \sum_{i=1}^m \cos^2(N^\perp, x_i) + \cos^2(N^\perp, t)$$

Из (58), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (56) получим

$$\int_{S_0} \tau(r, \theta) u_t(r, \theta, 0) ds = 0. \quad (59)$$

Поскольку линейная оболочка системы функций  $\{\bar{r}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$  плотна  $L_2(S_0)$  (см. [19]), то из (59) заключаем, что  $u_t(r, \theta, 0) = 0, \forall (r, \theta) \in S_0$ . Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши:  $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$  для уравнения (1) (см. [21]) будем иметь  $u(x, t) = 0, \forall (x, t) \in D_\beta$ .

Таким образом, единственность решения задачи (1), (2) доказана. Ее справедливость для задачи (1), (3) показывается аналогично. Теорема доказана полностью.

### Литература

1. Hadamard J. Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton University Bulletin. – 1902. – 13. – P.49-52.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.



3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных / М.: Наука, 2006. – 287 с.
4. Bourgin D.G. and Duffin R. The Dirichlet problem the vibrating string equation // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1939. – 45. – P.851-858.
5. Fox D.W., Pucci C. The Dirichlet problem the wave equation // Annali di Mathematica Pura ed Applicata. – 1958. – 46. – P.155-182.
6. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. – 6, 1/ – С.190-191.
7. Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J.Math.Mech. – 1969. – 18. – P.8
8. Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for the multidimensional wave equation // Mathematical problems Engineering. – 2010. – ID 653215. – 7 p.
9. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения // Современная математика и ее приложения. Уравнения с частными производными. – 2010. – 67. – С.28-32.
10. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
11. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
12. Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения / Орал: ЗКА-ГУ, 2007. – 140 с.
13. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / Новосибирск: НГУ, 1973. – 139 с.
14. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / М.: Высшая школа, 1985. – 302 с.
15. Алдашев С.А. Спектральные задачи Дарбу-Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Украинский математический журнал. – 2003. – 55. – 1. – С.100-107.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.: Наука, 1965. – 704 с.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / М.: Наука, 1974. – 296 с.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4, ч.1 / М.: Наука, 1974. – 334 с.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1976. – 544 с.
20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1966. – 724 с.
21. Смирнов М.М. Курс высшей математики. Т.4, ч.2 / М.: Наука, 1981. – 550 с.



**CORRECTNESS OF DIRICHLET'S AND POINCARÉ'S PROBLEMS  
IN CYLINDRICAL DOMAIN FOR DEGENERATED MULTIDIMENSIONAL  
HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CHAPLYGIN'S OPERATOR**

**S.A. Aldashev**

Scientific institute of applied mathematics and informatics of K.Zhubanov Actobe State University,  
Zhubanov Brothers Str., 256, Aktobe, Kazakhstan, e-mail: [aldash51@mail.ru](mailto:aldash51@mail.ru)

**Abstract.** It is proved that Dirichlet's and Poincaré problems in cylindrical domain for degenerated multidimensional hyperbolic equations with Chaplygin's operator have unique solution.

**Key words:** Dirichlet's and Poincaré's problems, correctness, degeneracy, multidimensional equations.



УДК 517.987

## НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ ПОРОГА ПЕРКОЛЯЦИИ В ЗАДАЧЕ УЗЛОВ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ <sup>2)</sup>

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко <sup>3)</sup>Белгородский государственный университет,  
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Предложен новый подход при нахождении верхних оценок порога перколяции в задаче узлов. На основе этого похода доказана более точная оценка порога перколяции случайного множества, порождаемого однородным бернуллиевским случайным полем на квадратной решётке  $\mathbb{Z}^2$ .

**Ключевые слова:** квадратная решетка, случайное бернуллиевское поле, перколяция, кластер, внешняя граница.

**1. Введение.** В настоящем сообщении предлагается новый метод получения верхних оценок порога перколяции  $c_*$  случайных множеств порождаемых однородным бернуллиевским случайным полем на бесконечном периодическом графе [1]. Этот метод демонстрируется вычислением верхней оценки для квадратной решетки. Она несколько точнее, чем известные к настоящему времени [1-5]. Как и в указанных работах, метод основан на оценке того отрезка в  $[0, 1]$  изменения вероятности заполнения  $c$  каждого из узлов решетки, в котором сходится сумма последовательности вероятностей случайных событий  $W_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Каждое из этих событий  $W_n$  состоит в появлении в случайной реализации *неспрямяемого* (определение непрямяемости см. в [6]), оптимально выбранного контура  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  на так называемой сопряженной решетке из незаполненных узлов, причем длина контуров  $|\gamma_n|$  стремится к бесконечности при неограниченном возрастании  $n$  и каждый из них окружает фиксированную, наперед выбранную вершину решетки. Сходимость указанного ряда влечет, на основании леммы Бореля-Кантелли, равенство нулю вероятности события  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$  появления в реализации хотя бы одного из контуров последовательности  $\langle \gamma_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ , что означает наличие на случайной реализации такой вершины  $z$  на решетке, в которой начинается бесконечный путь, состоящий из заполненных вершин. Принципиальное отличие от используемых ранее приемов оценивания последовательности вероятностей событий  $W_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  состоит в учете структуры случайной реализации в вершинах, непосредственно примыкающих, в смысле связности на квадратной решетке, к вершинам каждого из контуров  $\gamma_n$  во внутренней по отношению к этому контуру области  $\text{Int}[\gamma]$  на решетке. Сопутствующим

<sup>2)</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

<sup>3)</sup>Антонова Е.С., аспирант Белгородского государственного университета

Вирченко Ю.П., док. физ.-мат. наук, зав. кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета



методическим новшеством при получении оценки порога перколяции является использование более точной оценки числа  $n(s)$  всех спрямляемых контуров на квадратной решетке, охватывающих фиксированную вершину и имеющих заданную длину  $s$ .

**2. Задача теории перколяции на квадратной решетке.** Квадратной решеткой называется пара  $\langle \mathbb{Z}^2, \Phi \rangle$ , где некоторое семейство  $\Phi$  двухэлементных подмножество из  $\mathbb{Z}^2$  определяет отношение смежности на ней. Для квадратной решетки  $\Phi = \{\{x, y\} \in \mathbb{Z}^2 : x\varphi y\}$ , где  $x\varphi y$  в тех и только тех случаях когда  $y = x \pm e_1$ , либо  $y = x \pm e_2, e_1 = \langle 1, 0 \rangle, e_2 = \langle 0, 1 \rangle$ . Далее, если это не оговаривается дополнительно, под символом  $\mathbb{Z}^2$  всегда понимается квадратная решетка. Пусть  $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$  – однородное бернуллиевское случайное поле (далее, «тильда» указывает на случайность используемых объектов). Такое поле полностью определяется значением вероятности заполнения узла

$$c = \Pr\{\tilde{c}(x) = 1\}.$$

Поле  $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$  индуцирует случайное множество с реализациями  $\{\tilde{M} : \tilde{M} \subset \mathbb{Z}^2\}$ , где  $\tilde{M} = \{x : \tilde{c}(x) = 1\}$ , которые мы будем называть далее *конфигурациями заполненных вершин* или, просто, *конфигурациями*. Ясно, что распределение вероятностей для возможных реализаций  $\tilde{M}$  полностью определяется набором вероятностей

$$\Pr\{\tilde{M} : A \subset \tilde{M}\} = c^{|A|}, \quad A \subset \mathbb{Z}^2,$$

где здесь и далее  $|\cdot| = \text{Card}\{\cdot\}$ .

Отношение смежности  $\varphi$  индуцирует, естественным образом, отношение связности для вершин, входящих в конфигурацию  $\tilde{M}$ , а именно, две вершины  $x$  и  $y$  из  $\tilde{M}$  связаны, если существует путь – последовательность  $\langle x_i; i = 0, 1, 2, \dots, n \rangle, x_i \in \tilde{M}, x_0 = x, x_n = y$  и  $x_i\varphi x_{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Каждая конфигурация  $\tilde{M}$  однозначно разлагается на непересекающиеся классы эквивалентности  $\tilde{W}_j, \tilde{M} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{W}_j$ , порождаемых отношением связности вершин. Эти классы называются в теории перколяции *кластерами*. Семейство кластеров, связанное с фиксированной конфигурацией  $\tilde{M}$ , будем обозначать  $\mathcal{W}[\tilde{M}] = \{\tilde{W}_j; j \in \mathbb{N}\}$ . Если  $x \in \tilde{W}_j$  для некоторого  $j \in \mathbb{N}$  в конфигурации  $\tilde{M}$ , то этот кластер  $\tilde{W}_j$  будем обозначать  $\tilde{W}(x)$ .

Пусть

$$Q(c) = \Pr\{\exists(z \in \mathbb{Z}^2 : |W(z)| = \infty)\}.$$

Если  $Q(c) > 0$ , то говорят что такое поле  $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$  обладает перколяцией. В связи с этим вводится характеристика

$$c_* = \inf\{c : Q(c) = 0\},$$

которая называется *порогом перколяции*. В рассматриваемом нами случае однородного бернуллиевского поля вероятность  $Q(c)$  равна либо 0, либо 1.

**3. Неспрямляемые контуры на сопряженной решетке.** Введем на  $\mathbb{Z}^2$ , следуя [1], новое понятие смежности  $\bar{\varphi}$ , т.е. наряду с графом  $\mathbb{Z}^2$  будем рассматривать граф  $\bar{\mathbb{Z}}^2$



с тем же множеством вершин  $\mathbb{Z}^2$ , но с отношением смежности  $\bar{\varphi}$ . При этом Вершины  $x$  и  $y$  на  $\mathbb{Z}^2$  назовём  $\bar{\varphi}$ -смежными, если  $x\bar{\varphi}y$ , либо  $y = x + e_1 \pm e_2$ , или  $y = x - e_1 \pm e_2$ .

Путь  $\gamma = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$  на  $\bar{\mathbb{Z}}^2$  конечный или бесконечный называется неспрямляемым, если  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$  и  $x_i \bar{\varphi} x_{i+1}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$  и каждая его вершина имеет в  $\gamma$  только две  $\bar{\varphi}$ -смежные вершины. Неспрямляемым циклом  $\gamma$  на  $\bar{\mathbb{Z}}^2$  называется неспрямляемый путь  $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ , у которого  $x_0 = x_n$ ,  $n = |\gamma|$ . На каждом неспрямляемом цикле введем определенную ориентацию, например, против часовой стрелки, которая будет использоваться в дальнейшем. Неспрямляемые циклы мы называем далее просто *циклами*. Справедлива (см. [6])

**Теорема 1.** Пусть  $x$  – фиксированная вершина на  $\mathbb{Z}^2$ . Любой цикл на  $\bar{\mathbb{Z}}^2$ , окружающий вершину  $x$ , разбивает  $\mathbb{Z}^2 \setminus \gamma$  на две части:

$$\text{Int}[\gamma] \equiv \{u \notin \gamma : \forall (\alpha(u); |\alpha(u)| = \infty : \alpha(u) \cap \gamma \neq \emptyset)\}$$

и  $\mathbb{Z}^2 \setminus (\text{Int}[\gamma] \cup \gamma)$  так, что  $x \in \text{Int}[\gamma]$ . При этом из любой вершины  $x$  цикла  $\gamma$  существует бесконечный неспрямляемый путь, который не пересекается с  $\text{Int}[\gamma]$  и не содержит других отличных от  $x$  вершин из  $\gamma$ .

Следствием неспрямляемости цикла  $\gamma$  является следующее свойство ее вершин.

**Теорема 2.** Пусть  $u, v, w$  – тройка  $\bar{\varphi}$ -смежных вершин, следующих друг за другом на цикле  $\gamma$  согласно введенной ориентации. Тогда, при  $u\bar{\varphi}v$ , вершина  $w$  обязательно принадлежит одному из следующих наборов:

- трёхэлементному множеству  $\{2v - u, v \pm e\}$ , где  $e$  – единичный вектор, ортогональный вектору  $(v - u)$ , если  $u\bar{\varphi}v$ ;
- пятиэлементным множествам

$$\{2v - u, v + \varepsilon e_1, v + \varepsilon e_2, v \pm e'/2\},$$

если  $v = u + \varepsilon(e_1 + e_2)$  и

$$\{2v - u, v + \varepsilon e_1, v - \varepsilon e_2, v \pm e'/2\},$$

если  $v = u + \varepsilon(e_1 - e_2)$ , где  $e'$  – вектор, ортогональный  $(v - u)$ ,  $|e'| = \sqrt{2}$  и  $\varepsilon = \pm 1$ .

**4. Достаточное условие перколяции на  $\mathbb{Z}^2$ .** Введём в рассмотрение семейство  $\mathcal{B}$  всех  $\bar{\varphi}$ -циклов  $\gamma$ , окружающих вершину 0 и таких, что из каждой вершины  $x$  любого цикла  $\gamma$  существует бесконечный неспрямляемый путь, который не пересекается с  $\text{Int}[\gamma]$  и не содержит других отличных от  $x$  вершин из  $\gamma$ . Проведем из вершины 0 путь  $\alpha(0) = \langle je_1; j \in \mathbb{N}_+ \rangle$  бесконечной длины. Тогда, согласно Теореме 2, каждый цикл  $\gamma \in \mathcal{B}$  обязательно пересечет этот путь в некоторой вершине. Среди множества всех таких вершин пересечения выберем ближайшую к вершине 0. Пусть таковой является вершина  $le_1$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Все циклы из  $\mathcal{B}$  распадаются на непересекающиеся классы  $\mathcal{C}_l$ , где к одному классу отнесем циклы с одной и той же вершиной  $le_1$ .

Цикл  $\gamma \in \mathcal{C}_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$  назовем оптимально выбранным на конфигурации  $\tilde{M}$ , если на этой конфигурации не существует никакого другого цикла  $\gamma_-$  такого, что  $\text{Int}[\gamma_-] \subset \text{Int}[\gamma]$ ,  $\mathcal{C}\tilde{M} \supset \text{Int}[\gamma] \setminus \text{Int}[\gamma_-] \neq \emptyset$ .



Для каждого  $\bar{\varphi}$ -цикла  $\gamma \in \mathcal{C}_l, l \in \mathbb{N}$  введем событие

$$C_l = \{\tilde{M} : \gamma \subset \mathcal{C}\tilde{M}, \gamma - \text{оптимально выбран}\}. \quad (2)$$

Тогда вероятность события  $B\{\exists(\gamma \in \mathcal{B} : \gamma \subset \mathcal{B}, \gamma - \text{оптимально выбран})\}$  равна

$$\Pr\{B\} = \sum_{l=0}^{\infty} \Pr\{C_l\}. \quad (3)$$

Если сумма в правой части конечна, то, согласно лемме Бореля-Кантелли, вероятность одновременной реализации бесконечной совокупности событий из семейства  $\{C_l; l \in \mathbb{N}\}$  равна нулю. Тогда с вероятностью 1 в каждой случайной реализации существует некоторый максимальный цикл  $\gamma \in \mathcal{B}$  такой, что за его пределами найдётся вершина  $z$  и вместе с ней бесконечный путь  $\alpha(z)$  без самопересечений, начинающийся в этой вершине. Это означает, что для бернуллиевого поля  $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$  событие  $\{\tilde{M} : \exists(\tilde{W} \in \mathcal{W}[\tilde{M}] : |\tilde{W}| = \infty)\}$  имеет вероятность 1.

Таким образом, нашей задачей является нахождение достаточно удачных оценок для вероятностей  $\Pr\{C_l\}$  таких, которые бы обеспечили сходимость ряда (3).

### 5. Оценка порога перколяции. Докажем основное утверждение работы.

Для фиксированного цикла  $\gamma$  введем связанное с ним однозначным образом множество

$$\gamma' = \{x \in \text{Int}[\gamma] : \exists(y \in \gamma : x\varphi y)\} = \bigcup_{y \in \gamma} \{x \in \text{Int}[\gamma] : y\varphi x\}.$$

Оно является связанным множеством относительно отношения смежности  $\bar{\varphi}$ . Его отличительным свойством является то, что любой путь с начальной вершиной в  $\text{Int}[\gamma]$  имеет с ним непустое пересечение. Кроме того,  $\gamma' \cap \tilde{M} \neq \emptyset$  (можно показать, что  $|\gamma'| > |\gamma|/3$ ).

**Лемма 1.** Для фиксированного цикла  $\gamma \in \mathcal{B}$  справедливо неравенство  $|\gamma'| \geq |\gamma|/2 - 1$ .

□ Доказательство ведётся индукцией по числу вершин в  $\text{Int}[\gamma]$ . В том случае, когда  $\text{Int}[\gamma] = \{0\}$ , то есть при  $|\text{Int}[\gamma]| = 1$ , имеется 4 вершины смежные с вершиной 0, которые составляют цикл  $\gamma$ , а  $\{0\} = \gamma'$ . Тогда неравенство очевидным образом выполняется. Пусть неравенство имеет место для любого цикла  $\gamma \in \mathcal{B}$ , если  $|\text{Int}[\gamma]| = m$ . Рассмотрим произвольный цикл  $\gamma \in \mathcal{B}$ , для которого  $|\text{Int}[\gamma]| = m + 1$ . Построим для этого цикла множество  $\gamma' \subset \text{Int}[\gamma]$ .

Положим, что в  $\gamma'$  имеется вершина  $x$ , которая имеет только одну смежную с ней вершину в  $\text{Int}[\gamma]$ . Тогда остальные три смежные с ней вершины обязательно содержатся в  $\gamma$ . В противном случае, найдётся вершина, смежная с  $x$ , которая находится в  $\mathcal{C}(\text{Int}[\gamma] \cup \gamma)$ , и из  $\gamma'$  существует бесконечный неспрямляемый путь с начальной вершиной  $x$ , который не пересекается с  $\gamma$ . При удалении вершины  $x$  из  $\text{Int}[\gamma]$  она становится вершиной нового оптимально выбранного цикла, который окружает  $\text{Int}[\gamma] \setminus \{x\}$ . Тогда возможны два случая: либо число вершин в  $\gamma'$  уменьшается на 1 и число вершин в



$\gamma$  уменьшается на две, либо число вершин в  $\gamma'$  не изменяется и не изменяется число вершин в  $\gamma$ . В обоих случаях, так как для вновь полученном внутреннем множестве  $\text{Int}[\gamma] \setminus \{x\}$  число вершин равно  $m$ , и для него, по предположению индукции, доказываемое неравенство выполняется, то это неравенство выполняется и для исходного множества  $\text{Int}[\gamma]$ .

Пусть в  $\gamma'$  нет вершины  $x$  только с одной смежной вершиной в  $\text{Int}[\gamma]$ . Тогда в  $\gamma'$  обязательно имеется вершина  $x$ , которая имеет только две смежные с ней вершины из  $\text{Int}[\gamma]$ . Причем, эти две смежные вершины переходят одна в другую поворотом на угол  $\pi/2$  вокруг вершины  $x$ . Среди всех возможных вершин с такими свойствами выберем, например, ту, которая имеет наибольшую координату по оси вдоль вектора  $e_1$ . Тогда возможно два случая. В первом случае, обе смежные с  $x$  вершины содержатся в  $\gamma'$ , а, во втором, одна из них та, которая имеет меньшую координату по оси вдоль  $e_1$ , содержится в  $\text{Int}[\gamma]$ , но не содержится в  $\gamma'$ , а вторая, которая имеет такую же как и у  $x$  координату вдоль этой оси, содержится в  $\gamma'$ . При удалении вершины  $x$  из  $\text{Int}[\gamma]$ , в первом случае,  $|\gamma|$  и  $|\gamma'|$  уменьшаются на 1 и во втором,  $|\gamma|$  и  $|\gamma'|$  остаются неизменными. В обоих случаях, так как для цикла, полученного удалением вершины  $x$ , который является оптимально выбранным для  $\text{Int}[\gamma] \setminus \{x\}$ , неравенство выполняется, то оно выполняется и для множеств  $\gamma$  и  $\gamma'$ . ■

**Теорема 3.** Для однородного бернуллиевского случайного поля  $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^2\}$  на квадратной решётке  $\mathbb{Z}^2$  справедливо неравенство  $c_* \leq c_0$ , где  $c_0$  – наибольший на  $[0, 1]$  корень уравнения  $3.951 * c^{1/2}(1 - c) = 1$  ( $c_0 \approx 0.6983$  с избытком).

□ Зафиксируем цикл  $\gamma \in \mathcal{C}_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Так как все узлы цикла незаполнены при реализации случайного события  $C_l$  и статистически независимы друг от друга и от узлов, входящих в  $\gamma'$ , то справедлива элементарная оценка

$$P(\gamma) \leq (1 - c)^{|\gamma|} c^a (1 - c)^b,$$

где  $a$  – число заполненных узлов, и, соответственно,  $b$  – число незаполненных узлов во множестве  $\gamma'$ . При этом  $a + b = |\gamma'|$ . Вследствие Леммы 1,  $a + b \geq |\gamma|/2 - 1$ . Так как  $c < 1$  и  $(1 - c) < 1$ , то функция  $c^a (1 - c)^b$  от переменных  $a$  и  $b$  может достигать максимума в области  $\{a, b : a \geq 0, b > 0, a + b \geq |\gamma|/2 - 1\}$  именно на ее границе – на отрезке, где  $a + b = |\gamma|/2 - 1$ . Тогда

$$(1 - c)^{-|\gamma|} P(\gamma) \leq c^a (1 - c)^{|\gamma|/2 - 1 - a} = (1 - c)^{|\gamma|/2 - 1} \left( \frac{c}{1 - c} \right)^a.$$

Будем теперь считать, согласно утверждению теоремы, что  $c > 1/2$ . Тогда функция от  $a$ , стоящая в правой части, достигает максимума в наибольшем возможном значении  $a = |\gamma|/2 - 1$  (заметим, что при этом выполняется упомянутое выше условие  $a > |\gamma|/3$ ). Отсюда следует, что

$$P(\gamma) < c^{|\gamma|/2 - 1} (1 - c)^{|\gamma|}.$$

Отсюда и из (3) следует, что

$$\Pr\{C_l\} = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} P(\gamma),$$



$$\Pr\{B\} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} P(\gamma) < \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=4}^{\infty} r_k(l) c^{k/2-1} (1-c)^k,$$

где  $r_k(l)$  – число циклов в классе  $\mathcal{C}_l$ , имеющих длину  $k$ . При этом, очевидно, что  $r_k(l) = 0$  при  $k > l + 1$ . Для этих значений  $k$  воспользуемся известной оценкой  $r_k(l) < 4(k-1)s_{k-1}$  (см. [2 - 4]), где  $s_k$  – число циклов длины  $k$  в классе  $\mathcal{C}_l$ . Тогда достаточно установить, что в условиях теоремы сходится ряд

$$\sum_{k=4}^{\infty} (k-1)s_{k-1} c^{k/2-1} (1-c)^k.$$

Этот ряд сходится в том случае, если

$$c^{1/2}(1-c)\lambda < 1, \tag{4}$$

где  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k^{1/k}$ . Это неравенство будет, наверняка, иметь место, если выполняется  $c^{1/2}(1-c)\lambda_+ < 1$ , где  $\lambda_+ > \lambda$ .

Так как  $c > 1/2$ , то, для выполнения неравенства с фиксированным  $\lambda_+$ , необходимо и достаточно, чтобы  $c > c_0$ , где  $c_0$  – больший из двух имеющихся на интервале  $[0, 1]$  корней уравнения  $c^{3/2} - c^{1/2} + \lambda_+^{-1} = 0$ . Это связано с тем, что минимум полинома  $t^3 - t + \lambda_+^{-1} = 0$  достигается в точке  $t = \sqrt{3}/3$ , и поэтому интересующий нас корень находится на  $(1/3, 1)$ .

Воспользуемся следующей оценкой  $\lambda_+ = 3.951$  для числа  $\lambda$ , полученной в [4,5]. Тогда, используя нужное решение уравнения  $t^3 - t + \lambda_+^{-1} = 0$ , получаем  $c_0 = 0.6983$ . ■

### Литература

1. Кестен Х. Теория просачивания для математиков / Москва: Мир, 1986. – 390 с.
2. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Revision of upper estimate of percolation threshold on square lattice // ArXiv math-phys/0204033, 2002.
3. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Revision of the upper estimate of percolation threshold in square lattice // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – 10;1. – P.29-39.
4. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory // Studies in Mathematical Physics Research. ed. Charles V. Benton / New York: Nova Science Publishers, Inc., 2004. – P.155-175.
5. Вирченко Ю.П., Толмачёва Ю.А. Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке // Украинский математический журнал. – 2005. – 57;10. – С.1315-1326.
6. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 3. // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 23(118);25. – С.112-126.
7. Zuev S.A. Bounds of the percolation threshold for a square lattice // Theory of Probability and its Applications. – 1987. – 32;3. – P.551-553.



8. Зуев С.А. Оценки порога перколяции для квадратной решетки // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – 32;3. – С.606-609.

**NEW METHOD OF UPPER ESTIMATE CALCULATION  
OF PERCOLATION THRESHOLD ON SQUARE LATTICE IN SITE PROBLEM**

**E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko**

**Abstract.** New approach of upper estimate obtaining of percolation threshold in site problem is proposed. In frameworks of the approach it is proved more accurate estimate of percolation threshold when random set is generated by uniform Bernoulli random field on square lattice  $\mathbb{Z}^2$ .

**Key words:** square lattice, random Bernoulli field, percolation, cluster, external boundary.



УДК 517.9

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И.В. Астахова <sup>4)</sup>

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991, Россия, e-mail: [ast@diffiety.ac.ru](mailto:ast@diffiety.ac.ru)

**Аннотация.** Для нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера с комплексными коэффициентами получены асимптотические формулы для модуля и аргумента решений и равномерные оценки решений.

**Ключевые слова:** асимптотические формулы, равномерные оценки решений, комплексные коэффициенты.

**1. Введение.** Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''(x) = p(x)|y(x)|^m y(x), \quad (1)$$

где  $m > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , а  $p(x)$  – непрерывная комплекснозначная функция. Если  $p(x)$  – действительнзначная функция, то это уравнение превращается в хорошо известное уравнение типа Эмдена-Фаулера, асимптотические свойства которого детально исследовались в работах Ф.Аткинсона, Р.Беллмана, И.Кигурадзе, А.Кнезера, В.Кондратьева, А.Мышкиса, Дж.Сансоне и других авторов. Подробную библиографию см. в [1]. С другой стороны, (1) – это одномерное уравнение Шредингера. Качественные свойства решений различных задач, связанных с этим уравнением в  $n$ -мерном случае ( $n \geq 2$ ), были описаны М.Ф.Бидо-Верон, Х.Брезисом, Л.Вероном, Б.Гершем, С.Дои, Т.Като, В.Кондратьевым, П.Константином, Н.Хаяси, М.Шубиным и другими авторами, см. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

В настоящей работе получены асимптотические формулы для модуля и аргумента решений и равномерные оценки решений.

**2. Основные результаты.** При  $p(x) = p_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  существует решение  $Y(x)$ , определенное на  $(0, +\infty)$ , которое имеет вид

$$|Y(x)| = C_1 x^{-2/m}, \quad \arg Y(x) = C_2 \ln x$$

<sup>4</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00989).



с постоянными

$$C_1 = m \sqrt{Q \left( \frac{1 + 4/m}{\operatorname{Im} p_0} \right)^2},$$

$$C_2 = -Q \frac{1 + 4/m}{\operatorname{Im} p_0},$$

$$Q = \frac{-\operatorname{Re} p_0 + \sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + \frac{8(m+2)}{(m+4)^2} (\operatorname{Im} p_0)^2}}{2}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $m > 0$  и  $p(x) \equiv p_0 = \operatorname{const} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Тогда все нетривиальные решения уравнения (1) исчерпывающе описываются следующим образом:

1. Все непродолжаемые решения, определенные на полуоси  $(-\infty, x_0)$  или  $(x_0, +\infty)$ , которые имеют точный вид:

$$|y(x)| = |Y(|x - x_0|)|,$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x - x_0|) + \varphi_0$$

с произвольными вещественными  $x_0$  и  $\varphi_0$ .

2. Для любого непродолжаемого решения, определенного на ограниченном интервале  $(x_1, x_2)$ , справедливо представление

$$|y(x)| = |Y(|x - x_k|)| (1 + o(1)),$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x - x_k|) (1 + o(1)),$$

где  $x \rightarrow x_k$ ,  $k = 1, 2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $p(x)$  – непрерывная комплекснозначная функция,  $m > 0$  и  $p(x_0) = p_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Пусть  $y(x)$  – непродолжаемое решение уравнения (1), определенное на  $(x_1, x_0)$  или  $(x_0, x_2)$  при  $-\infty \leq x_1 < x_0 < x_2 \leq +\infty$ . Тогда

$$|y(x)| = |Y(|x - x_0|)| (1 + o(1)),$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x - x_0|) (1 + o(1)),$$

при  $x \rightarrow x_0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $p(x)$  – непрерывная комплекснозначная функция,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $m > 0$ ,  $p(x) \rightarrow p_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  при  $x \rightarrow \varepsilon\infty$ . Пусть, далее,  $y(x)$  – решение уравнения (1), определенное в окрестности  $\varepsilon\infty$ . Тогда

$$|y(x)| = |Y(|x|)| (1 + o(1)),$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x|) (1 + o(1)),$$



при  $x \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\operatorname{Re} p(x) > p_* > 0$ . Тогда для любого решения  $y(x)$  уравнения (1), определенного на  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  и такого, что  $y(x_0) \neq 0$ , справедлива оценка

$$\varepsilon^2 < \frac{C}{p_*} |y(x_0)|^{-m}$$

с постоянной  $C > 0$ , зависящей только от  $m$ .

**Следствие.** Пусть для функции  $p(x)$  выполняются условия теоремы 4. Тогда для любого решения  $y(x)$  уравнения (1), определенного на  $[a, b]$ , выполнено

$$|y(x)| < m \sqrt{\frac{C}{\varepsilon^2 p_*}}$$

для всех  $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ .

**Следствие.** Пусть для функции  $p(x)$  выполняются условия теоремы 4. Тогда для любого решения  $y(x)$  уравнения (1), определенного на  $(-\infty, x_0)$  или  $(x_0, +\infty)$ , на всей области определения выполняется неравенство

$$|y(x)| < |x - x_0|^{-2/m} \sqrt[m]{C/p_*} .$$

**Следствие.** Если  $\operatorname{Re} p(x) > q_* x^{-r}$ ,  $q_* > 0$ ,  $r > 0$ , то для любого решения  $y(x)$  уравнения (1), определенного на  $(0, +\infty)$ , для всех  $x > 0$  выполнено

$$|y(x)| < x^{(r-2)/m} \sqrt[m]{C/q_*} .$$

Во всех случаях  $C$  зависит только от  $m$  и совпадает с соответствующей постоянной из теоремы 4.

**Следствие.** Если функция  $p(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 4, то единственным решением уравнения (1), определенным на  $(-\infty, +\infty)$ , является тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ .

**3. Доказательство основных результатов.** Всюду ниже для уменьшения количества дробей в формулах вместо  $m/4$  используется  $\mu$ .

**3.1. Фазовое пространство.** Заметим, что если функция  $p(x)$  является постоянной и  $y(x)$  является решением (1), то и функция  $z(x) = A y(|A|^{2\mu}(x - x_0))$  при произвольных константах  $A \in \mathbb{C}$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$  также является решением этого уравнения. Это позволяет понизить размерность задачи, отождествляя решения, связанные приведенным соотношением.

Пара функций  $(y(x), y'(x))$  порождает кривую в  $\mathbb{C}^2$ . Кривые, порожденные нетривиальными решениями, лежат в  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . Решения  $y(x)$  и  $y(x - x_0)$  порождают одну и ту же кривую (с точностью до параметризации).



Рассмотрим отношение эквивалентности в  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , при котором решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x) = Ay_1(|A|^{2\mu}x)$  порождают одну и ту же кривую в факторпространстве. Это отношение может быть задано формулой

$$(z_0, z_1) \sim (Az_0, A|A|^{2\mu}z_1)$$

для произвольного комплексного  $A \neq 0$ .

Обозначим через  $\Phi$  факторпространство  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  по этому отношению эквивалентности. Его можно снабдить структурой действительного двумерного многообразия класса  $C^1$  с помощью атласа, состоящего из двух карт. Обе карты являются биекциями подмножеств  $\Phi$  на  $\mathbb{C}$ .

Первая карта определена на классах эквивалентности комплексных пар  $(z_0, z_1)$ , для которых  $z_0 \neq 0$ , то есть на всем  $\Phi$ , кроме точки-классе эквивалентности пары  $(0, 1)$ . Биекция определяется комплекснозначной функцией

$$u : [(z_0, z_1)] \mapsto \frac{z_1}{z_0|z_0|^{2\mu}}.$$

Вторая карта определена для классов пар  $(z_0, z_1)$ ,  $z_1 \neq 0$ , следующим образом:

$$U : [(z_0, z_1)] \mapsto \frac{z_0|z_1|^{2\mu/(2\mu+1)}}{z_1}.$$

Непосредственно проверяется, что эти функции корректно определены и являются биекциями. Замены координат задаются соотношениями

$$u = \frac{1}{U|U|^{2\mu}}, \quad U = \frac{|u|^{2\mu/(2\mu+1)}}{u}$$

и принадлежат классу  $C^1$  как отображения  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Полученное многообразие гомеоморфно двумерной сфере и поэтому компактно. Его даже можно вложить в  $\mathbb{R}^3$  так, чтобы  $u$  и  $U$  стали стереографическими проекциями (см. рис. 1).

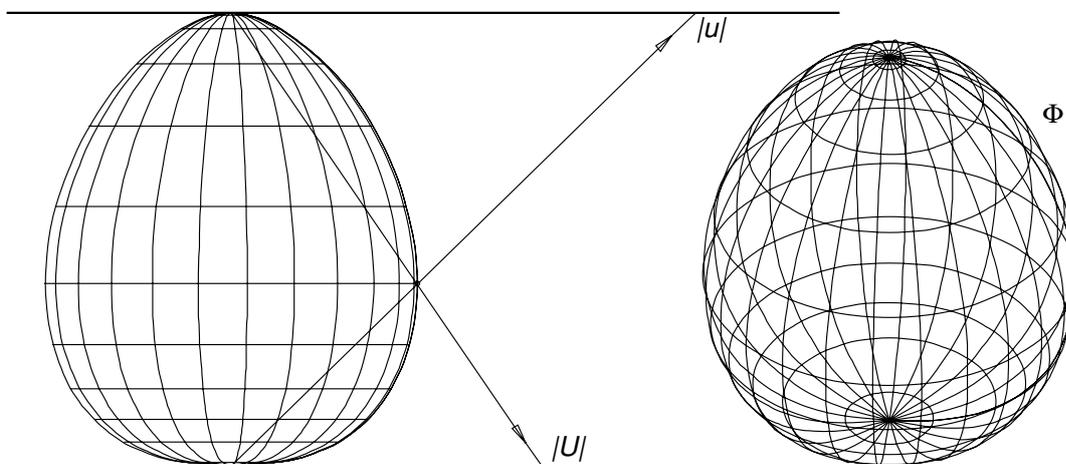


Рис. 1.



3.2. Динамическая система на фазовом пространстве для постоянной  $p(x)$ . Опишем в координатах кривые, порождаемые на  $\Phi$  решениями (1) с постоянной  $p(x) \equiv p_0$ .

На первой карте имеем

$$u = \frac{y'}{y|y|^{2\mu}},$$

откуда непосредственными вычислениями получаем

$$u' = |y|^{2\mu} (p_0 - (\mu + 1)u^2 - \mu|u|^2).$$

Следовательно, выбирая в качестве параметра переменную  $t$ , для которой  $dt = |y|^{2\mu} dx$ , получим внутреннее описание кривой:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = p_0 - (\mu + 1)u^2 - \mu|u|^2.$$

Аналогично, на второй карте кривые, порождаемые решениями (1), описываются уравнением

$$\frac{dU}{d\tau} = 1 + \frac{|U|^{4\mu}}{2\mu + 1} \left( \mu \bar{p}_0 |U|^2 - (\mu + 1)p_0 U^2 \right)$$

с другим параметром  $\tau$ , для которого  $d\tau = |y'|^{2\mu/(2\mu+1)} dx$ .

Правые части обоих уравнений принадлежат классу  $C^1$  в действительном смысле. Из двух параметров с помощью разбиения единицы можно сделать один так, чтобы все кривые, порожденные на  $\Phi$  решениями (1), были траекториями автономной динамической системы с новым параметром в качестве независимой переменной. Ввиду компактности  $\Phi$ , любая траектория системы продолжена на всю ось  $(-\infty, +\infty)$ , причем именно такие полные траектории, а не их части порождаются непродолжаемыми решениями (1).

У системы есть ровно две неподвижные точки (при условии, что  $p_0 \neq 0$ ). Они обе находятся в первой карте и отличаются только знаком. Уравнение  $\dot{u} = 0$ , записанное в терминах  $v = \operatorname{Re} u_0$  и  $w = \operatorname{Im} u_0$ :

$$\begin{cases} (2\mu + 1)v_0^2 - w_0^2 = \operatorname{Re} p_0, \\ 2(\mu + 1)v_0 w_0 = \operatorname{Im} p_0, \end{cases}$$

можно легко решить, получив два решения:  $u_0 = v_0 + w_0 i$ , где

$$v_0 = \sqrt{\frac{\operatorname{Re} p_0 + \sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + \frac{2\mu + 1}{(\mu + 1)^2} (\operatorname{Im} p_0)^2}}{4\mu + 2}}, \quad (2)$$

$$w_0 = \frac{\operatorname{Im} p_0}{2(\mu + 1) v_0}.$$

и второе решение  $-u_0 = -v_0 - w_0 i$ .



Иногда удобнее записывать систему в терминах неподвижной точки  $u_0$ , а не  $p_0$ :

$$\dot{u} = (\mu + 1)(u_0^2 - u^2) + \mu(|u_0|^2 - |u|^2). \quad (3)$$

**3.3. Случай  $u_0 = \pm i$ . Замкнутые траектории.** Хотя случай  $u_0 = \pm i$  соответствует действительному значению  $p_0$ , его исследование помогает понять поведение траекторий и для комплексных  $p_0$ .

В этом случае система записывается следующим образом:

$$\dot{u} = -1 - (\mu + 1)u^2 - \mu|u|^2. \quad (4)$$

Среди ее решений легко находится одно действительное, меняющееся от  $+\infty$  до  $-\infty$ . На самом деле, это только часть замкнутой траектории на  $\Phi$ , проходящей через единственную не покрытую первой картой точку. Так как другие траектории не могут проходить через эту же точку, они все полностью лежат в первой карте. Точнее, в полуплоскости  $\text{Im } u > 0$  или  $\text{Im } u < 0$ . Ввиду инвариантности системы относительно комплексного сопряжения достаточно рассмотреть только первый случай. Для любой такой траектории, не являющейся неподвижной точкой, исследуем поведение  $\arg(u - i)$ , используя обозначения  $v = \text{Re } u$ ,  $w = \text{Im } u$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arg(u - i) &= \text{Im} \frac{\dot{u}}{u - i} = \\ &= \text{Im} \frac{(-1 - (\mu + 1)u^2 - \mu|u|^2)(\bar{u} + i)}{|u - i|^2} = \\ &= -\frac{-w + |u|^2 w + 1 + (\mu + 1) \text{Re}(u^2) + \mu|u|^2}{|u - i|^2} = \\ &= \frac{-w(w^2 - 1) - v^2(w + 1) - 2\mu v^2 + w^2 - 1}{v^2 + (w - 1)^2} = \\ &= \frac{-(w^2 - 1)(w - 1) - v^2(w + 1) - 2\mu v^2}{v^2 + (w - 1)^2} = \\ &= -w - 1 - 2\mu \left( \frac{v}{|u - i|} \right)^2 < -1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что траектория обходит точку  $i$  по часовой стрелке, регулярно меняя знак  $\text{Re } u$ .



Из (4) также вытекает, что все траектории симметричны относительно мнимой оси. Значит, все они, кроме действительной оси и двух неподвижных точек, представляют собой овалы, окружающие одну из неподвижных точек, причем обход  $i$  происходит по, а  $-i$  — против часовой стрелки.

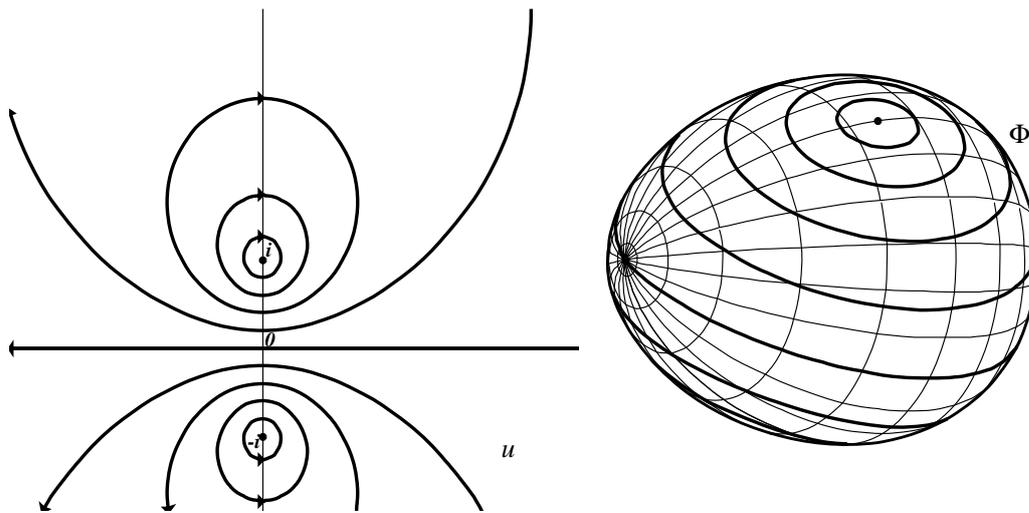


Рис. 2.

Глобально  $\Phi$ , покрытое траекториями, выглядит, как глобус с двумя полюсами и множеством параллелей (см. рис. 2).

3.4. Случай комплексных  $p_0$ . Перейдем к случаю  $p_0$  с ненулевой мнимой частью, при этом  $u_0$  будет иметь и ненулевую действительную часть. Для использования предыдущего результата повернем и сожмем/растянем картину траекторий так, чтобы неподвижная точка, для которой  $\text{Re } u_0 > 0$ , попала в  $i$ . Это преобразование записывается в первой карте в виде  $u \mapsto iu/u_0$  и легко продолжается до глобального диффеоморфизма пространства  $\Phi$ .

Непосредственные вычисления приводят к уравнению для такой модифицированной системы:

$$\dot{u} = i \left( (\mu + 1) (1 + u^2) u_0 + \mu (1 - |u|^2) \bar{u}_0 \right). \quad (5)$$

То, как ее траектории проходят через описанные выше овалы, можно выяснить, оценив знак мнимой части произведения  $\dot{u}$  из (2) на  $\bar{u}$  из (5).

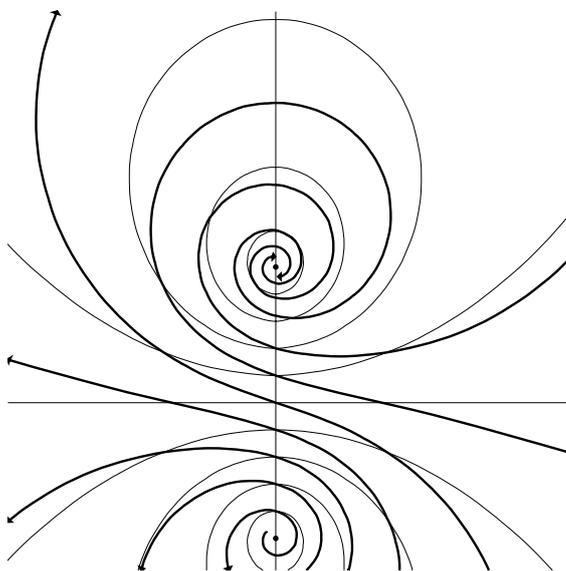


Рис. 3.

Это произведение равно

$$i \left( (\mu + 1)^2 |1 + u^2|^2 \bar{u}_0 - \mu^2 (1 - |u^2|)^2 u_0 + \right. \\ \left. + (\mu^2 + \mu) (1 - |u^2|) \left( (1 + u^2) u_0 - (1 + \bar{u}^2) \bar{u}_0 \right) \right).$$

Его мнимая часть выглядит менее громоздко

$$\left( (\mu + 1)^2 |1 + u^2|^2 - \mu^2 (1 - |u^2|)^2 \right) \operatorname{Re} u_0.$$

Согласно неравенству треугольника для векторов  $-1$  и  $u^2$ , последнее выражение строго положительно для всех  $u \in \mathbb{C}$ , кроме  $\pm i$ . Это значит, что вне неподвижных точек все траектории системы (5) последовательно покидают все овалы, лежащие в полуплоскости  $\operatorname{Im} u < 0$ , пересекают действительную ось, после чего последовательно проникают в овалы из полуплоскости  $\operatorname{Im} u > 0$  (см. рис. 3). Эти траектории не могут иметь предельную точку, отличную от  $-i$  при  $t \rightarrow -\infty$  и отличную от  $i$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому, ввиду компактности многообразия  $\Phi$ , для всех нетривиальных траекторий эти точки являются пределами.

Таким образом, траектории системы (3) – это две неподвижные точки и траектории, стремящиеся от одной из них к другой.

Зная неподвижные точки системы, можно явно выписать семейство решений уравнения (1). Используя полярную форму для  $y = \rho e^{i\varphi}$ , можно записать уравнение  $u = u_0$  в виде

$$\frac{y'}{y|y|^{2\mu}} = \frac{(\rho' + i\rho\varphi')}{\rho^{2\mu+1}} = \operatorname{Re} u_0 + i \operatorname{Im} u_0.$$



Решая его отдельно для действительной и мнимой частей, получим

$$\rho^{-2\mu} = -2\mu \operatorname{Re} u_0 (x - x_0),$$

а затем

$$\varphi = -\frac{\operatorname{Im} u_0}{2\mu \operatorname{Re} u_0} \ln |x - x_0| + \varphi_0.$$

Из неотрицательности  $\rho$  следует, что это решение определено на  $(-\infty, x_0)$ . Аналогичные формулы для  $-u_0$  описывают решение, заданное на  $(x_0, +\infty)$ .

Для остальных траекторий имеют место соотношения  $u \sim u_0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $u \sim -u_0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , приводящие к асимптотическим формулам для соответствующих решений уравнения (1), определенным на конечных интервалах  $(x_1, x_2)$ .

Учитывая (2) и возвращаясь в обозначениях к  $m = 4\mu$ , получим следующее описание решений.

В рассматриваемом случае  $p(x) \equiv p_0 = \operatorname{const} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  точное решение  $Y(x)$ , определенное на  $(0, +\infty)$ , имеет вид

$$|Y(x)| = C_1 x^{-2/m}, \quad \arg Y(x) = C_2 \ln x$$

с постоянными

$$C_1 = m \sqrt{Q \left( \frac{1 + 4/m}{\operatorname{Im} p_0} \right)^2},$$

$$C_2 = -Q \frac{1 + 4/m}{\operatorname{Im} p_0},$$

$$Q = \frac{-\operatorname{Re} p_0 + \sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + \frac{8(m+2)}{(m+4)^2} (\operatorname{Im} p_0)^2}}{2}.$$

Оказывается, что все решения уравнения (1) за исключением тривиального  $y \equiv 0$  имеют такую же асимптотику, как  $Y(x)$ .

Таким образом, доказана Теорема 1 (см. также рис. 4).

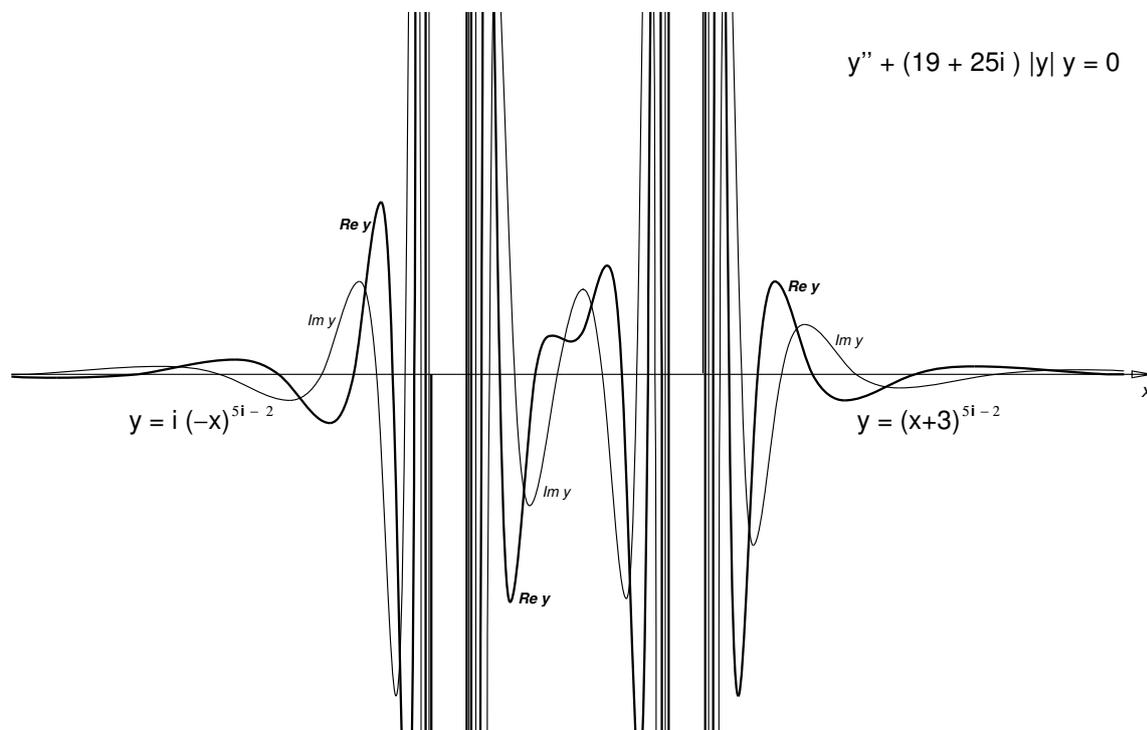


Рис. 4.

3.5. Случай непостоянной  $p(x)$ . Рассмотрим теперь случай, когда  $p$  зависит от  $x$ . Нетривиальные решения уравнения (1) по-прежнему порождают кривые на  $\Phi$ , однако эти кривые не являются траекториями общей динамической системы. В первой карте кривые описываются уравнением

$$\dot{u} = \tilde{p}(t) - (\mu + 1)u^2 - \mu|u|^2$$

с различными функциями  $\tilde{p}(t)$  для разных  $y(x)$ . Однако, некоторые свойства  $p(x)$  наследуются  $\tilde{p}(t)$ , что помогает исследовать асимптотическое поведение траекторий на  $\Phi$  и решений (1).

Пусть  $y(x)$  – непродолжаемое решение уравнения (1), определенное на интервале  $(x_1, x_2)$  (возможно, неограниченном). Поскольку уравнение не изменяется при преобразовании  $x \mapsto -x$ , достаточно исследовать поведение решения  $y(x)$  только вблизи  $x_2$ . Пусть  $p(x) \rightarrow p_0$  при  $x \rightarrow x_2$  (этот предел автоматически существует при  $x_2 < +\infty$ ). Рассмотрим кривую, порождаемую  $y(x)$  на  $\Phi$  и преобразуем  $\Phi$  (как и в случае  $p(x) \equiv p_0$ ) таким образом, чтобы точка  $u_0 = v_0 + w_0i$ , определяемая (2), перешла в  $i$ .

Преобразованная кривая не является траекторией (5). Но вне сколь угодно малых окрестностей точек  $\pm i$  при  $\tilde{p}(t)$  близких к  $p_0$  с учетом непрерывности эта кривая пересекает овалы описанные для  $u_0 = i$  в том же порядке, что и траектории (5). Таким образом, единственной возможной причиной для кривой не стремиться к  $\pm i$  (или к  $\pm u_0$



перед преобразованием  $\Phi$ ) является ограниченность  $t$  и  $\tau$  при  $x \rightarrow x_2$ . Докажем, что этого не может быть.

Пусть  $x_2 < +\infty$ . Тогда, в силу непродолжаемости, хотя бы одна из функций  $y(x)$  или  $y'(x)$  должна быть неограниченной. Но это невозможно если  $t$  ограничено:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \ln (|y'|^2 + |y|^{4\mu+2}) \right| \\ & \leq \frac{dx}{dt} \cdot \frac{2|y'| |y''| + (4\mu + 2) |y|^{4\mu+1} |y'|}{|y'|^2 + |y|^{4\mu+2}} \\ & \leq \frac{2|y'| |y|^{4\mu+1} (\sup |p(x)| + 2\mu + 1)}{|y|^{2\mu} (|y'|^2 + |y|^{4\mu+2})} \\ & \leq \frac{2|y'| |y|^{2\mu+1} (\sup |p(x)| + 2\mu + 1)}{|y'|^2 + |y|^{4\mu+2}} \\ & \leq \sup |p(x)| + 2\mu + 1. \end{aligned}$$

Докажем, что случай  $x_2 = +\infty$  также невозможен. Пусть  $s \in \Phi$  – предел траектории при  $x \rightarrow +\infty$ . Рассмотрим произвольное решение уравнения (1) с  $p(x) \equiv p_0$  и начальными условиями  $(y_3, y'_3)$  при  $x_3 \in (x_1, x_2)$  порождающим  $s$ . Поскольку  $s \neq \pm u_0$ , существует  $x_4 > x_3$  такое, что  $(y(x_4), y'(x_4))$  порождает другую точку в  $\Phi$ . Так как окрестность  $V$  точки  $s$  может быть выбрана так, что для любого решения (1) с  $p(x)$  достаточно близкой к  $p_0$  и начальными данными достаточно близкими к  $(y_3, y'_3)$  соответствующая кривая в  $\Phi$  будет покидать  $V$  перед  $x = x_4$ . Из этого множества решений, используя подстановку  $z(x) = A y (|A|^{2\mu}(x - x'))$ , можно получить любое решение (1) с  $p(x)$  достаточно близкой к  $p_0$  и начальными данными (для всех  $x$ ) порождающими точку в  $\Phi$ , достаточно близкую к  $s$ . Следовательно, любая кривая в  $\Phi$ , порождаемая решением (1) и определенная в окрестности  $+\infty$  не может иметь предела, отличного от  $\pm u_0$ . Это доказывает Теорему 2 и Теорему 3.

### 3.6. Оценки. Докажем Теорему 4.

Рассмотрим вещественнозначную непрерывную функцию, связанную с решением соотношением

$$V(x) = 2|y(x)|' |y(x)|^{-2\mu-1}$$

и определенную на максимальном интервале  $(x_0 - \delta_*, x_0 + \delta^*)$ , где определено и отлично от нуля  $y(x)$ .

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$2|y'| = (|y^2|)' |y|^{-1} = (y' \bar{y} + y \bar{y}') |y|^{-1},$$

можно представить функцию  $V(x)$  в виде

$$V(x) = (y' \bar{y} + y \bar{y}') |y|^{-2\mu-2}.$$



Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\begin{aligned} V'(x) &= \\ &= 2|y|^{2\mu} \operatorname{Re} p(x) + 2|y'|^2 |y|^{-2\mu-2} - \\ &- (\mu + 1)V(x)^2 |y|^{2\mu} > \\ &> |y|^{2\mu} (2p_* - (\mu + 1)V(x)^2) . \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим случай  $V(x_0) \geq 0$ . В этом случае, поскольку  $V'|_{V=0} > 0$ , функция  $V(x)$  остается положительной для всех  $x \in (x_0, x_0 + \delta^*)$ . Из определения  $V$  следует, что  $|y(x)|$  возрастает на этом интервале. Следовательно,  $|y(x)| > |y(x_0)| \neq 0$  для  $x \in (x_0, x_0 + \delta^*)$  и функция  $V(x)$  определена для всех  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ .

Обозначим  $\sqrt{p_*/(\mu + 1)}$  через  $V_*$ . Предположим, что  $V(x_0) \in [0, V_*]$ . Пока  $V(x)$  остается на этом отрезке, для  $x > x_0$  выполняется:

$$\begin{aligned} V'(x) &> |y|^{2\mu} (2p_* - (\mu + 1)V_*^2) = \\ &= |y|^{2\mu} p_* > |y(x_0)|^{2\mu} p_* . \end{aligned}$$

Следовательно,  $V(x_1)$  становится равной  $V_*$  для некоторых  $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$  таких что

$$x_1 - x_0 < \frac{V_*}{|y(x_0)|^{2\mu} p_*} = \frac{|y(x_0)|^{-2\mu}}{(\mu + 1)V_*} . \quad (6)$$

и поэтому  $|y(x_1)| > |y(x_0)|$ .

Теперь предположим, что  $V(x_0) \geq V_*$ . Поскольку  $V'|_{V=V_*} > |y(x_0)|^{2\mu} p_* > 0$ , неравенство  $V(x) > V_*$  остается справедливым  $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ . Поэтому для таких  $x$  получаем

$$(|y|^{-2\mu})' = -\mu V < -\mu V_*$$

и следовательно  $|y(x)|^{-2\mu} < |y(x_0)|^{-2\mu} - \mu V_*(x - x_0)$ . Таким образом,

$$x - x_0 < \frac{|y(x_0)|^{-2\mu}}{\mu V_*} . \quad (7)$$

Оценки (6) и (7) показывают что ни одна из функций  $V(x)$  и  $y(x)$  не может быть определена при  $x > x_0 + \varepsilon$  для

$$\varepsilon^2 \geq \frac{|y(x_0)|^{-4\mu}}{V_*^2} \left( \frac{1}{\mu + 1} + \frac{1}{\mu} \right)^2 = \frac{16(m + 2)^2}{m^2(m + 4)} |y(x_0)|^{-m} . \quad (8)$$

Случай  $V(x_0) < 0$  исследуется аналогичным образом, но левее  $x_0$ . А именно, для отрицательной  $V(x_0)$  ни одна из функций  $V(x)$  и  $y(x)$  не может быть определена при  $x > x_0 + \varepsilon$  для  $\varepsilon$ , удовлетворяющих (8). Это завершает доказательство.



Из доказанной теоремы немедленно вытекают все четыре следствия.

**Замечание.** Результаты об асимптотическом поведении решений уравнения с действительными коэффициентами содержатся в [11] (см. также библиографию), об асимптотическом поведении решений уравнения (1) с постоянным комплексным коэффициентом содержатся в [12], [13], о равномерных оценках положительных решений уравнений с действительными коэффициентами – в [14], некоторые результаты об оценках решений для уравнения (1) были опубликованы в [15], см. также [16].

### Литература

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1990. – 432 с.
2. Bidaut-Véron M.F. Local and global behaviour of solutions of quasilinear elliptic equations of Emden-Fowler type // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1989. – 107. – P.293-324.
3. Brezis H., Kato T. Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potential // J.Math. pures et appl. – 1979. – 58. – P.137-151.
4. Constantin P. Decay estimates of Schrödinger equations // Commun. Math. Phys. – 1990. – 127. – P.101-108.
5. Doi S. On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of solutions // J. Math. Kyoto Univ. – 1994. – 34. – P.319-328.
6. Guerch B., Véron L. Local properties of stationary solutions of some nonlinear singular Schrödinger equation // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1991. – 7. – P.65-114.
7. Hayashi N. Global existence of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations // Comm. P.D.E.. – 1993. – 18. – P.1109-1124.
8. Kato T. Schrödinger operators with singular potentials // Israël J. Math. – 1972. – 13. – P.135-148.
9. Kato T. On some Schrödinger operators with a singular complex potential // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV. – 1978. – 5. – P.105-114.
10. Kondrat'ev V., Shubin M. Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry / Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 110 / Birkhäuser Verlag: Basel/Switzerland, 1999.
11. Асташова И. В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. – 2003. – 8. – С.3-33.
12. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений уравнения типа Эмдена-Фаулера с комплексным коэффициентом // Современная математика и ее приложения. – 2005. – 29. – С.14-18.
13. Astashova I.V. On asymptotic properties of the one-dimensional Schrödinger equation / Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 114 / Birkhäuser Verlag: Basel/Switzerland, 2000. – P.15-19.
14. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН. – 2008. – 72;6. – С.103-124.



15. Astashova I.V. Estimates of Solutions to One-dimensional Schrödinger Equation / World Scientific: Progress in Analysis, v. II / Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress. – Singapore, 2003. – P.955-960.
16. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М: МЭСИ, 2010. – 242 с. (ISBN 978-5-7764-0647-8)

## ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO NONLINEAR EQUATIONS WITH COMPLEX COEFFICIENTS

I.V. Astashova

Moscow Lomonosov State University,  
Leninskie gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, e-mail: [ast@diffiety.ac.ru](mailto:ast@diffiety.ac.ru)

**Abstract.** Asymptotic formulas for modulus and argument of solutions and uniform estimates of solutions are obtained to nonlinear differential equations of Emden-Fowler's type with complex coefficients.

**Key words:** asymptotic behavior, uniform estimates of solutions, complex coefficients.



УДК 517.988.6

## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ МНОГОЗНАЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ МОНОТОННОГО ТИПА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ <sup>5)</sup>

Е.С. Барановский <sup>6)</sup>

Воронежский государственный университет,  
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: bes220@rambler.ru

**Аннотация.** В работе вводится понятие топологической степени многозначных возмущений плотно определенных отображений типа  $(S_+)$ . Изучаются основные свойства данной топологической характеристики. Построенная степень применяется при исследовании задачи управления с обратной связью для одного класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

**Ключевые слова:** топологическая степень, монотонные отображения, плотно определенные отображения типа  $(S_+)$ , многозначные отображения, асферичные множества, управление с обратной связью, нелинейные эллиптические уравнения.

### Введение

Как известно, при изучении многих задач оптимального управления, задач теории дифференциальных уравнений и включений, вариационных неравенств естественно возникают уравнения с многозначными операторами (см., например, [1]). Удобным средством исследования таких уравнений является использование топологических характеристик типа степени многозначных возмущений различных классов однозначных операторов. В [2, 3] была построена теория степени многозначных возмущений  $(S_+)$ -отображений.<sup>7)</sup> На основе этой теории удалось изучить ряд задач управления с обратной связью в системах, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных [3]–[5].

В предлагаемой статье понятие степени распространяется на более широкий, чем отмеченный выше, класс многозначных отображений, а именно класс многозначных возмущений плотно определенных  $(S_+)_E$ -отображений. Необходимость такого расширения обусловлена тем, что в приложениях возникают ситуации, когда вместо операторов, заданных на всем пространстве, приходится рассматривать операторы, определенные лишь на всюду плотном множестве. Так происходит, например, при изучении краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений с «сильно растущими» коэффициентами (см. [6, 7]).

<sup>5)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

<sup>6)</sup>Барановский Евгений Сергеевич – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник НИИ математики Воронежского государственного университета.

<sup>7)</sup>Напомним, что отображения класса  $(S_+)$  представляют собой разновидность операторов монотонного типа и естественно возникают при изучении нелинейных краевых задач [12].



Отметим, что теория степени плотно определенных отображений типа  $(S_+)$  была предложена А. Картсатосом и И.В. Скрышником [6]. Приложения этой теории и некоторые ее обобщения рассматриваются в [7, 8].

В данной работе предложена конструкция топологической степени отображений вида  $A - G$ , где  $A$  – однозначный плотно определенный оператор, удовлетворяющий условию  $(S_+)_E$ ,  $G = \varphi \circ \Sigma$ ,  $\varphi$  – однозначный оператор,  $\Sigma$  – компактное многозначное отображение с асферичными образами. Степень определяется по следующей схеме. Сначала отображение  $A - G$  аппроксимируется конечномерными проекциями  $A_k - G_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и определяется степень многозначных отображений  $A_k - G_k$ . Затем устанавливается стабилизация полученных степеней при  $k \rightarrow \infty$  и предельное значение объявляется степенью исходного отображения. Введенная таким образом характеристика обладает всеми стандартными свойствами топологической степени. В работе рассматривается свойство гомотопической инвариантности степени, а также доказывается аналог «основной теоремы» теории степени. В заключение статьи построенная степень применяется при исследовании задачи управления с обратной связью для одного класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

## 1. Предварительные сведения из теории многозначных отображений

Пусть  $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$  – метрические пространства. Для  $M \subset \mathcal{X}$ ,  $\varepsilon > 0$  обозначим  $O_\varepsilon(M) = \{x \in \mathcal{X} : \rho(x, M) < \varepsilon\}$ , где  $\rho(x, M)$  – расстояние от  $x$  до множества  $M$ .

Пусть  $\Sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  – многозначное отображение (мультиотображение).

**Определение 1.** *Непрерывное отображение  $\sigma_\varepsilon: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $\varepsilon > 0$ , называется  $\varepsilon$ -аппроксимацией  $\Sigma$ , если для каждого  $x \in \mathcal{X}$  существует  $x' \in O_\varepsilon(x)$  такое, что  $\sigma_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon(\Sigma(x'))$ .*

Совокупность всех  $\varepsilon$ -аппроксимаций  $\Sigma$  обозначим символом  $a(\Sigma, \varepsilon)$ .

**Лемма 1** (см. [9]). *Пусть  $\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{Z}$  – метрические пространства,  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ ,  $\varphi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}'$  – непрерывные отображения. Пусть  $\Sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  – полунепрерывное сверху многозначное отображение такое, что для любого  $x \in \mathcal{X}$  множество  $\Sigma(x)$  компактно. Пусть  $K$  – компактное подмножество  $\mathcal{X}$  такое, что*

$$f(x) \notin \varphi \circ \Sigma(x), \quad x \in K.$$

Тогда, если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало и  $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$ , то

$$f(x) \neq \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x), \quad x \in K.$$

Приведем теперь определение используемого в дальнейшем класса многозначных отображений. Но сначала напомним некоторые понятия и факты.

**Определение 2** (см. [10]). *Непустое компактное подмножество  $M$  метрического пространства  $\mathcal{Z}$  называется асферичным, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta$ ,  $0 < \delta < \varepsilon$ , такое, что для каждого  $n = 0, 1, \dots$  любое непрерывное отображение  $g: S^n \rightarrow O_\delta(M)$*



может быть продолжено до непрерывного отображения  $\tilde{g}: B^{n+1} \rightarrow O_\varepsilon(M)$ , где  $S^n$ ,  $B^{n+1}$  – единичные сфера и шар в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Определение 3** (см. [1]). Мультиотображение  $\Sigma : X \rightarrow Z$  называется полунепрерывным сверху в точке  $x_0 \in X$ , если для любого открытого множества  $V \subset Z$  такого, что  $\Sigma(x_0) \subset V$ , найдется  $U_{x_0}$  – окрестность точки  $x_0$  такая, что  $\Sigma(U_{x_0}) \subset V$ . Мультиотображение  $\Sigma$  называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке  $x \in X$ .

**Определение 4** (см. [10]). Мнозначное отображение  $\Sigma : X \rightarrow Z$  называется  $J$ -мультиотображением ( $\Sigma \in J(X, Z)$ ), если оно полунепрерывно сверху и для любого  $x \in X$  множество  $\Sigma(x)$  является асферичным.

Чтобы отметить насколько широк класс  $J$ -мультиотображений, напомним [10], что примерами асферичных множеств в линейном нормированном пространстве служат компактные выпуклые или стягиваемые множества,  $R_\delta$  - множества.

Следующее аппроксимационное свойство  $J$ -мультиотображений, восходящее к работам А.Д. Мышкиса, доказано в [11].

**Лемма 2.** Пусть  $X$  – локально стягиваемый конечномерный компакт,  $\Sigma \in J(X, Z)$ . Тогда

i) мультиотображение  $\Sigma$  аппроксимируемо, то есть для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$ ;

ii) для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta_0 > 0$  такое, что для каждого  $\delta$  ( $0 < \delta < \delta_0$ ) и для любых двух  $\delta$ -аппроксимаций  $\sigma_\delta, \sigma'_\delta \in a(\Sigma, \delta)$  найдется непрерывное отображение  $\tilde{\sigma} : X \times [0, 1] \rightarrow Z$  такое, что

$$\tilde{\sigma}(\cdot, 0) = \sigma_\delta, \quad \tilde{\sigma}(\cdot, 1) = \sigma'_\delta$$

и  $\tilde{\sigma}(\cdot, \lambda) \in a(\Sigma, \varepsilon)$  для каждого  $\lambda \in [0, 1]$ .

Пусть  $X, X', Z$  – метрические пространства. Символом  $CJ(X, X')$  будем обозначать совокупность всех мультиотображений  $G : X \rightarrow X'$  вида  $G = \varphi \circ \Sigma$ , где  $\Sigma \in J(X, Z)$ ,  $\varphi : Z \rightarrow X'$  – непрерывное однозначное отображение.

## 2. Степень многозначных возмущений $(S_+)_E$ -отображений

Пусть  $X$  – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство,  $X^*$  – его сопряженное. Обозначим сильную и слабую сходимости соответственно через  $\rightarrow$  и  $\rightharpoonup$ . Для элементов  $x \in X$  и  $q \in X^*$  через  $\langle q, x \rangle$  обозначим действие функционала  $q$  на элементе  $x$ .

Зафиксируем  $\{v_m\}_{m=1}^\infty$  – полную систему элементов в пространстве  $X$ . Предположим, что при каждом  $k$  элементы  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы. Обозначим через  $E_k$  линейную оболочку элементов  $v_1, \dots, v_k$ . Символом  $E$  обозначим  $\bigcup_{k=1}^\infty E_k$ .

Рассмотрим  $A : D(A) \rightarrow X^*$  – однозначный оператор с областью определения  $D(A) \subset X$ . Предположим, что  $D(A) \supset E$ .



**Определение 5** (см. [7]). Будем говорить, что оператор  $A$  удовлетворяет условию  $(S_+)_E$ , если для любого  $h \in X^*$  и любой последовательности  $\{u_j\} \subset E$  такой, что  $u_j \rightharpoonup u_0$  и

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \langle A(u_j), u_j \rangle \leq \langle h, u_0 \rangle, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \langle A(u_j), v \rangle = \langle h, v \rangle$$

для любого  $v \in E$ , справедливо  $u_j \rightarrow u_0$ ,  $u_0 \in D(A)$ ,  $A(u_0) = h$ .

Условие  $(S_+)_E$  – обобщение хорошо известного условия монотонности  $(S_+)$ . В работах [6, 7] была построена теория степени  $(S_+)_E$ -отображений.

Наша цель – введение понятия топологической степени для многозначных возмущений  $(S_+)_E$ -отображений, т.е. отображений вида  $A - G$ , где  $A$  – оператор, удовлетворяющий условию  $(S_+)_E$ ,  $G$  – многозначное отображение.

Предположим, что:

- 1) оператор  $A$  удовлетворяет условию  $(S_+)_E$ ;
- 2) для любого  $v \in E$  и  $k \in \mathbb{N}$  функция  $\alpha_{v,k} : E_k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha_{v,k}(u) = \langle A(u), v \rangle$ , непрерывна.

Для многозначного отображения  $G : D(G) \rightarrow X^*$  с областью определения  $D(G)$ ,  $D(A) \subset D(G) \subset X$ , предположим выполненными следующие условия:

- 3)  $G = \varphi \circ \Sigma$  принадлежит классу  $CJ(D(G), X^*)$ ;
- 4) для любого ограниченного множества  $M \subset X$  множество  $\Sigma(D(G) \cap M)$  относительно компактно.

Пусть  $U$  – открытое ограниченное подмножество  $X$ . Символами  $\bar{U}$ ,  $\partial U$  обозначим соответственно замыкание и границу множества  $U$ .

Предположим, что:

- 5) для любого  $k$  множество  $\overline{U \cap E_k}$  локально стягиваемо;
- 6) включение

$$A(u) \in G(u), \quad u \in D(A)$$

не имеет решений, принадлежащих  $\partial U$ .

При выполнении условий 1) – 6) мы определим  $\text{Deg}(A - G, U, 0)$  – степень многозначного отображения  $A - G$  множества  $U$  относительно точки  $0 \in X^*$ . Для того чтобы привести конструкцию степени, нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Введем конечномерный проектор  $\pi_k : X^* \rightarrow E_k$ ,  $\pi_k(h) = \sum_{i=1}^k \langle h, v_i \rangle v_i$ .

Обозначим  $A_k = \pi_k \circ A$ ,  $G_k = \pi_k \circ G$ ,  $\varphi_k = \pi_k \circ \varphi$ .

**Лемма 3.** Пусть  $M$  – замкнутое ограниченное подмножество  $X$ . Пусть включение

$$A(u) \in G(u), \quad u \in D(A)$$

не имеет решений, принадлежащих  $M$ . Тогда существует  $k_0$  такое, что при  $k \geq k_0$  включение

$$A_k(u) \in G_k(u), \quad u \in E_k$$

не имеет решений, принадлежащих  $M$ .

□ Доказательство этого утверждения проведем методом от противного. Предположим, что существует последовательность  $u_j \in E_{k_j} \cap M$  такая, что  $A_{k_j}(u_j) \in G_{k_j}(u_j)$



и  $k_j \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ . В этом случае найдется последовательность  $g_j \in G(u_j)$ , для которой справедливо:

$$\langle A(u_j) - g_j, v_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_j. \quad (1)$$

Поскольку последовательность  $\{u_j\}$  ограничена, можно считать, что  $u_j \rightarrow u_0 \in X$ . Кроме того, в силу условия 4) можно полагать, что  $g_j \rightarrow g_0 \in X^*$ .

Из (1) следует, что

$$\langle A(u_j), u_j \rangle = \langle g_j, u_j \rangle.$$

Поэтому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A(u_j), u_j \rangle = \langle g_0, u_0 \rangle.$$

Аналогично

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A(u_j), v \rangle = \langle g_0, v \rangle$$

для любого  $v \in E$ . Отсюда с учетом замкнутости множества  $M$  и условия 1) получаем:  $u_j \rightarrow u_0$ ,  $u_0 \in D(A) \cap M$  и  $A(u_0) = g_0$ .

Так как  $D(A) \subset D(G)$ , то  $u_0 \in D(G)$ . Поскольку  $u_j \rightarrow u_0$ ,  $g_j \rightarrow g_0$ ,  $g_j \in G(u_j)$  и мультиотображение  $G$  полунепрерывно сверху, имеем  $g_0 \in G(u_0)$ . Следовательно,  $A(u_0) \in G(u_0)$  и  $u_0 \in D(A) \cap M$ , что противоречит условиям леммы. Лемма доказана. ■

Пусть  $k \geq k_0$ . Определим степень многозначного отображения  $A_k - G_k : U \cap E_k \rightarrow E_k$  по формуле:

$$\text{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0) = \text{deg}(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0), \quad (2)$$

где символ  $\text{deg}$  обозначает степень однозначного конечномерного отображения,  $\varepsilon_k$  – достаточно малое положительное число,  $\sigma_{\varepsilon_k}$  –  $\varepsilon_k$ -аппроксимация мультиотображения  $\Sigma|_{\overline{U \cap E_k}}$  (существование аппроксимации следует из леммы 2).

Покажем, что данное определение корректно. Во-первых, заметим, что при достаточно малом  $\varepsilon_k$  степень в правой части (2) определена, поскольку

$$A_k(u) - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}(u) \neq 0, \quad u \in \partial U \cap E_k.$$

Последнее соотношение следует из условия 6), лемм 1,3.

Далее, покажем, что степень в правой части (2) не зависит от выбора  $\varepsilon_k$ -аппроксимации, т. е.

$$\text{deg}(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0) = \text{deg}(A_k - \varphi_k \circ \sigma'_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0) \quad (3)$$

для любых  $\sigma_{\varepsilon_k}, \sigma'_{\varepsilon_k} \in a(\Sigma|_{\overline{U \cap E_k}}, \varepsilon_k)$  при достаточно малом  $\varepsilon_k$ .

Из лемм 1–3 и условия 6) следует, что аппроксимации  $\sigma_{\varepsilon_k}, \sigma'_{\varepsilon_k}$  можно соединить непрерывной деформацией  $\tilde{\sigma} : \overline{U \cap E_k} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}$  такой, что  $\tilde{\sigma}(\cdot, 0) = \sigma_{\varepsilon_k}$ ,  $\tilde{\sigma}(\cdot, 1) = \sigma'_{\varepsilon_k}$  и

$$A_k(u) - \varphi_k \circ \tilde{\sigma}(u, t) \neq 0, \quad u \in \partial U \cap E_k, \quad t \in [0, 1].$$

Отсюда в силу свойства гомотопической инвариантности степени конечномерных отображений и следует равенство (3).



Справедливо следующее утверждение о стабилизации степени (2) при  $k \rightarrow \infty$ .

**Лемма 4.** Существует  $k_1$  такое, что при  $k \geq k_1$  величина  $\text{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0)$  не зависит от  $k$ .

□ Для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\text{Deg}(A_{k+1} - G_{k+1}, U \cap E_{k+1}, 0) = \text{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0) \quad (4)$$

при «больших»  $k$ .

Будем считать, что в (2) величины  $\varepsilon_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , выбраны так, что последовательность  $\{\varepsilon_k\}$  монотонно убывает и  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Пусть  $h_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — элементы пространства  $X^*$ , удовлетворяющие условию  $\langle h_j, v_i \rangle = \delta_{ij}$ ,  $i \in \{1, \dots, j\}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Рассмотрим отображение  $R_{k+1} : U \cap E_{k+1} \rightarrow E_{k+1}$ ,

$$R_{k+1}(u) = A_k(u) - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}(u) + \langle h_{k+1}, u \rangle v_{k+1}.$$

Покажем, что при достаточно больших  $k$

$$t(A_{k+1}(u) - \varphi_{k+1} \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}(u)) + (1-t)R_{k+1}(u) \neq 0, \quad (u, t) \in \partial(U \cap E_{k+1}) \times [0, 1]. \quad (5)$$

Предположим противное. Тогда без ограничения общности можно утверждать, что существуют последовательности  $t_m \in [0, 1]$ ,  $u_m \in \partial(U \cap E_m)$ ,  $u_m \rightarrow u_0$ , такие, что

$$t_m(A_m(u_m) - \varphi_m \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m)) + (1-t_m)R_m(u_m) = 0.$$

Последнее равенство эквивалентно следующим соотношениям

$$\langle A(u_m) - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (6)$$

$$t_m \langle A(u_m) - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v_m \rangle + (1-t_m) \langle h_m, u_m \rangle = 0. \quad (7)$$

В силу условия 4) можно считать, что  $\sigma_{\varepsilon_m}(u_m) \rightarrow q_0 \in \mathcal{Z}$  при  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому для любого  $v \in E$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle A(u_m), v \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v \rangle = \langle \varphi(q_0), v \rangle. \quad (8)$$

Оценим теперь величину  $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A(u_m), u_m \rangle$ .

Поскольку  $u_m \in E_m$ , то  $u_m$  можно представить в виде

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i^m v_i, \quad \xi_i^m \in \mathbb{R}.$$

С учетом равенств (6), (7) получим

$$\langle A(u_m), u_m \rangle = \sum_{i=1}^m \xi_i^m \langle A(u_m), v_i \rangle = \sum_{i=1}^m \xi_i^m \langle \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), v_i \rangle -$$



$$-\xi_m^m \frac{1-t_m}{t_m} \langle h_m, u_m \rangle = \langle \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), u_m \rangle - \xi_m^m \frac{1-t_m}{t_m} \langle h_m, u_m \rangle. \quad (9)$$

Поскольку

$$\langle h_m, u_m \rangle = \langle h_m, \sum_{i=1}^m \xi_i^m v_i \rangle = \sum_{i=1}^m \xi_i^m \langle h_m, v_i \rangle = \xi_m^m,$$

то из (9) следует

$$\langle A(u_m), u_m \rangle \leq \langle \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_m}(u_m), u_m \rangle.$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A(u_m), u_m \rangle \leq \langle \varphi(q_0), u_0 \rangle. \quad (10)$$

Так как оператор  $A$  удовлетворяет условию  $(S_+)_E$ , то из (8), (10) следует, что  $u_m \rightarrow u_0$ ,  $u_0 \in D(A) \cap \partial U$  и  $A(u_0) = \varphi(q_0)$ .

Из  $u_m \rightarrow u_0$ ,  $\sigma_{\varepsilon_m}(u_m) \rightarrow q_0$ ,  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и полунепрерывности сверху многозначного отображения  $\Sigma$  следует, что  $q_0 \in \Sigma(u_0)$ . Поэтому

$$A(u_0) = \varphi(q_0) \in \varphi \circ \Sigma(u_0) = G(u_0),$$

что противоречит условию 6). Таким образом, справедливость соотношения (5) доказана.

В силу свойства гомотопической инвариантности степени конечномерных из (5) следует, что

$$\deg(A_{k+1} - \varphi_{k+1} \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U \cap E_{k+1}, 0) = \deg(R_{k+1}, U \cap E_{k+1}, 0).$$

Кроме того, используя лемму Лере-Шаудера (см. например, [12]), получим, что

$$\deg(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U \cap E_k, 0) = \deg(R_{k+1}, U \cap E_{k+1}, 0).$$

Поэтому

$$\deg(A_{k+1} - \varphi_{k+1} \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U \cap E_{k+1}, 0) = \deg(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_{k+1}}, U \cap E_k, 0). \quad (11)$$

В силу независимости степени (2) от выбора  $\varepsilon_k$ -аппроксимации величина, стоящая в правой части (11), может быть использована для вычисления  $\text{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0)$ . Кроме того, очевидно, что степень из левой части (11) определяет  $\text{Deg}(A_{k+1} - G_{k+1}, U \cap E_{k+1}, 0)$ . Таким образом приходим к требуемому равенству (4). ■

Теперь мы можем дать основное определение.

**Определение 6.** Пусть выполнены условия 1)–6). Степенью многозначного отображения  $A - G$  множества  $U$  относительно точки  $0 \in X^*$  назовем число

$$\text{Deg}(A - G, U, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Deg}(A_k - G_k, U \cap E_k, 0).$$

Для введенной таким образом характеристики выполнены все стандартные свойства топологической степени. Отметим свойство гомотопической инвариантности степени.



Рассмотрим  $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \rightarrow X^*$  – отображение с областью определения  $D(\tilde{A}) \subset X \times [0, 1]$ . Обозначим  $D(\tilde{A}(\cdot, \lambda)) = \{u \in X : (u, \lambda) \in D(\tilde{A})\}$ . Предположим, что  $E \subset D(\tilde{A}(\cdot, \lambda))$  для любого  $\lambda \in [0, 1]$ . Предположим также, что для любого  $v \in E$  и  $k \in \mathbb{N}$  функция

$$\alpha_{v,k} : E_k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha_{v,k}(u, \lambda) = \langle \tilde{A}(u, \lambda), v \rangle$$

непрерывна.

**Определение 7.** Будем говорить, что оператор  $\tilde{A}$  удовлетворяет условию  $(\tilde{S}_+)_E$ , если для любого  $h \in X^*$  и любых последовательностей  $\{u_j\} \subset E$ ,  $\{\lambda_j\} \subset [0, 1]$  таких, что  $u_j \rightarrow u_0$ ,  $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$  и

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \langle \tilde{A}(u_j, \lambda_j), u_j \rangle \leq \langle h, u_0 \rangle, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \tilde{A}(u_j, \lambda_j), v \rangle = \langle h, v \rangle$$

для любого  $v \in E$ , справедливо  $u_j \rightarrow u_0$ ,  $u_0 \in D(\tilde{A}(\cdot, \lambda_0))$ ,  $\tilde{A}(u_0, \lambda_0) = h$ .

Рассмотрим отображения  $A_i : D(A_i) \cap \bar{U} \rightarrow X^*$ ,  $G_i : D(G_i) \cap \bar{U} \rightarrow X^*$ ,  $G_i = \varphi_i \circ \Sigma_i$ ,  $E \subset D(A_i) \subset D(G_i)$ ,  $i = 0, 1$ .

**Определение 8.** Будем говорить, что многозначные отображения  $A_0 - G_0$  и  $A_1 - G_1$  гомотопны, если выполнены следующие условия:

i) существует отображение  $\tilde{A}$ , удовлетворяющее условию  $(\tilde{S}_+)_E$  и равенствам

$$\tilde{A}(\cdot, 0) = A_0, \quad \tilde{A}(\cdot, 1) = A_1;$$

ii) существует мультиотображение  $\tilde{\Sigma} : D(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $D(\tilde{\Sigma}) \subset X \times [0, 1]$ ,  $D(\tilde{\Sigma}) \supset D(\tilde{A})$ ,  $\tilde{\Sigma} \in J(D(\tilde{\Sigma}), \mathcal{Z})$ , такое, что

$$\tilde{\Sigma}(\cdot, 0) = \Sigma_0, \quad \tilde{\Sigma}(\cdot, 1) = \Sigma_1$$

и для любого ограниченного  $M \subset X \times [0, 1]$  множество  $\tilde{\Sigma}(D(\tilde{\Sigma}) \cap M)$  относительно компактно в пространстве  $\mathcal{Z}$ ;

iii) существует непрерывное отображение  $\tilde{\varphi} : \mathcal{Z} \times [0, 1] \rightarrow X^*$  такое, что

$$\tilde{\varphi}(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}(\cdot, 1) = \varphi_1;$$

iv) включение

$$\tilde{A}(u, \lambda) \in \tilde{G}(u, \lambda), \quad (u, \lambda) \in D(\tilde{A}),$$

где  $\tilde{G}(u, \lambda) = \tilde{\varphi}(\tilde{\Sigma}(u, \lambda), \lambda)$ , не имеет решений, принадлежащих  $\partial U \times [0, 1]$ .

Используя свойство гомотопической инвариантности степени конечномерных отображений, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** Если многозначные отображения  $A_0 - G_0$  и  $A_1 - G_1$  гомотопны, то

$$\text{Deg}(A_0 - G_0, U, 0) = \text{Deg}(A_1 - G_1, U, 0).$$

Приведем теперь аналог «основной теоремы» теории степени.



**Теорема 2.** Если  $\text{Deg}(A - G, U, 0) \neq 0$ , то включение

$$A(u) \in G(u), \quad u \in U \cap D(A)$$

имеет по крайней мере одно решение.

□ Предположим противное. Тогда, согласно лемме 3, при достаточно больших  $k$  включение

$$A_k(u) \in G_k(u), \quad u \in E_k,$$

не имеет решений, принадлежащих множеству  $\bar{U}$ . В этом случае в силу леммы 1

$$A_k(u) - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}(u) \neq 0, \quad u \in \overline{U \cap E_k}.$$

Здесь  $\sigma_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k$ -аппроксимация  $\Sigma|_{\overline{U \cap E_k}}$  с достаточно малым  $\varepsilon_k$ .

Из определения 6 и свойств степени конечномерных отображений следует, что

$$\text{Deg}(A - G, U, 0) = \text{deg}(A_k - \varphi_k \circ \sigma_{\varepsilon_k}, U \cap E_k, 0) = 0.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему. ■

### 3. Пример

Проиллюстрируем, как может быть использована построенная теория степени при изучении задач управления с обратной связью.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho^2(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}) \right\} = f(x, v, u), \quad (12)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (13)$$

Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\rho, a_i, f$  – известные функции. Искомыми являются функция состояния  $v(x)$  и управление  $u(x)$ . Предполагается, что

$$u \in U(v), \quad (14)$$

где  $U$  – многозначное отображение, определяющее в системе управление с обратной связью.

Опишем условия, при которых рассматривается задача (12) – (14). Пусть функция  $\rho$  обладает свойством:

$\rho$ ) Функция  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и удовлетворяет оценке

$$0 \leq \rho(t) \leq \mu \left\{ \left| \int_0^t \rho(s) ds \right| + 1 \right\}^r, \quad t \in \mathbb{R}$$

с константами  $\mu > 0, 0 \leq r < \frac{n}{n-2}$ .



Отметим, что данное условие «роста» не является ограничительным. Этому условию удовлетворяет даже функция  $\rho(t) = e^t$  с экспоненциальным ростом.

Предположим, что для функций  $a_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  выполнены следующие условия:

а<sub>1</sub>) при фиксированных  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  функция  $a_i(\cdot, \eta, \xi)$  является измеримой;

а<sub>2</sub>) при почти всех  $x \in \Omega$  функция  $a_i(x, \cdot, \cdot)$  является непрерывной;

а<sub>3</sub>) существуют положительные константы  $p, p_1, \nu_1, \nu_2$  и функция  $g_0(x)$  такие, что

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, \eta, \xi) - a_i(x, \eta, \xi'))(\xi_i - \xi'_i) \geq \nu_1 |\xi - \xi'|^p,$$

$$|a_i(x, \eta, \xi)| \leq \nu_2 (|\eta|^{p_1} + |\xi|)^{p-1} + g_0(x)$$

при любых  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ , причем  $g_0 \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ ,  $p_1 < \frac{n}{n-p}$ ,  $2 \leq p < n$ .

Предположим также, что

f) функция  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и удовлетворяет оценке

$$|f(x, y_1, y_2)| \leq C (|y_1|^\alpha + |y_2|^\beta) + g_1(x),$$

где  $g_1 \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ ,  $C > 0$ ,  $\alpha = \frac{p_2(p-1)}{p}$ ,  $\beta = \frac{q(p-1)}{p}$ ,  $1 < p_2 < \frac{np}{n-p}$ ,  $q > 1$ ;

у) многозначное отображение  $U : L_{p_2}(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$  полунепрерывно сверху и для любого  $v \in L_{p_2}(\Omega)$  множество  $U(v)$  асферично.

Задачу (12)–(14) будем рассматривать в слабой постановке. Символом  $W_0^{1,p}(\Omega)$  обозначим подпространство соболевского пространства  $W^{1,p}(\Omega)$ , получающееся замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями  $\Omega$  по норме  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Определение 9.** Обобщенным решением задачи (12) – (14) назовем пару функций  $(v, u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L_q(\Omega)$ , для которой выполнено включение (14) и равенство

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left\{ \rho^2(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i \left( x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x, v, u) \psi dx$$

для любого  $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Чтобы сформулировать теорему о разрешимости задачи (12)–(14), введем вспомогательное однопараметрическое семейство задач:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho^{2\lambda}(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda a_i \left( x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \lambda) \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} = \lambda f(x, v, u), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (15)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (16)$$

$$u \in U(v). \quad (17)$$



Обозначим  $M = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \text{существуют } u \in L_q(\Omega), \lambda_0 \in [0, 1] \text{ такие, что пара } (v, u) \text{ является обобщенным решением задачи (15)–(17) с } \lambda = \lambda_0\}$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия  $\rho), a_1)–a_3), f), u)$ . Предположим, что множество  $M$  ограничено. Тогда задача (12)–(14) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

□ Для доказательства теоремы воспользуемся теорией степени, построенной во втором параграфе. Сначала дадим операторную трактовку рассматриваемой задачи.

Обозначим через  $C_0^\infty(\Omega)$  множество всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем  $\Omega$ . Зафиксируем  $\{v_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  – полную систему элементов в пространстве  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Предположим, что при каждом  $k$  элементы  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы. Обозначим через  $E_k$  линейную оболочку элементов  $v_1, \dots, v_k$ . Обозначим  $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ .

Введем оператор

$$\begin{aligned} \tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \times [0, 1] &\rightarrow [W_0^{1,p}(\Omega)]^*, \\ \langle \tilde{A}(v, \lambda), \psi \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left\{ \rho^{2\lambda}(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda a_i(x, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda) \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \end{aligned}$$

где  $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $D(\tilde{A}) = \{(v, \lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times [0, 1] : \rho^{2\lambda}(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\}$ .

Согласно [6], оператор  $\tilde{A}$  удовлетворяет условию  $(\tilde{S}_+)_E$ .

Рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} : W_0^{1,p}(\Omega) \times [0, 1] &\rightarrow L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega), \\ \tilde{\Sigma}(v, \lambda) &= \{i(v)\} \times U(i(v)), \end{aligned}$$

где  $i : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_{p_2}(\Omega)$  – оператор вложения. В силу теорем вложения соболевских пространств (см, например, [13]) оператор  $i$  определен корректно и является компактным. Поэтому для любого ограниченного множества  $Q \subset W_0^{1,p}(\Omega) \times [0, 1]$  множество  $\tilde{\Sigma}(Q)$  является относительно компактным в  $L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega)$ . Кроме того, из условия  $u)$  следует, что  $\tilde{\Sigma} \in J(W_0^{1,p}(\Omega) \times [0, 1], L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega))$ .

Определим отображение

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : L_{p_2}(\Omega) \times L_q(\Omega) \times [0, 1] &\rightarrow [W_0^{1,p}(\Omega)]^*, \\ \langle \tilde{\varphi}(v, u, \lambda), \psi \rangle &= \lambda \int_{\Omega} f(x, v, u) \psi(x) dx, \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Из теоремы М.А. Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции (см., например, [12, предложение 1.1, с. 9]) и условия  $f)$  следует, что оператор  $\tilde{\varphi}$  является непрерывным.



Обозначим

$$\tilde{G}(v, \lambda) = \tilde{\varphi}(\tilde{\Sigma}(v, \lambda), \lambda), \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \lambda \in [0, 1].$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что включение

$$\tilde{A}(v, 1) \in \tilde{G}(v, 1)$$

имеет по крайней мере одно решение  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Из условий теоремы следует, что существует шар  $\mathcal{B} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|v\| < R\}$  такой, что  $M \subset \mathcal{B}$ .

В силу установленных свойств выше свойств операторов  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\tilde{\varphi}$  отображения  $\tilde{A}(\cdot, 0) - \tilde{G}(\cdot, 0)$ ,  $\tilde{A}(\cdot, 1) - \tilde{G}(\cdot, 1)$  гомотопны в смысле определения 8 (при  $U = \mathcal{B}$ ). В этом случае, согласно теореме 1,

$$\text{Deg}(\tilde{A}(\cdot, 1) - \tilde{G}(\cdot, 1), \mathcal{B}, 0) = \text{Deg}(\tilde{A}(\cdot, 0) - \tilde{G}(\cdot, 0), \mathcal{B}, 0). \quad (18)$$

Поскольку  $\tilde{A}(\cdot, 0) - \tilde{G}(\cdot, 0) = \tilde{A}(\cdot, 0)$ , то вычисление степени (18) сводится вычислению степени  $\text{Deg}(\tilde{A}(\cdot, 0), \mathcal{B}, 0)$ .

Заметим, что  $D(\tilde{A}(\cdot, 0)) = W_0^{1,p}(\Omega)$  и

$$\langle \tilde{A}(v, 0), v \rangle > 0, \quad v \in \partial\mathcal{B}.$$

Отсюда в силу свойств степени  $(S_+)$ -отображений [12] получаем, что

$$\text{Deg}(\tilde{A}(\cdot, 0), \mathcal{B}, 0) = 1$$

и, следовательно,

$$\text{Deg}(\tilde{A}(\cdot, 1) - \tilde{G}(\cdot, 1), \mathcal{B}, 0) = 1.$$

Таким образом, разрешимость включения  $\tilde{A}(v, 1) \in \tilde{G}(v, 1)$  следует из теоремы 2. ■

### Заключение

В работе построена новая топологическая характеристика – степень отображений вида  $A - G$ , где  $A$  – однозначный плотно определенный оператор, удовлетворяющий условию  $(S_+)_E$ ,  $G = \varphi \circ \Sigma$ ,  $\varphi$  – однозначный оператор,  $\Sigma$  – компактное многозначное отображение с асферичными образами. Изучены основные свойства данной характеристики. С помощью построенной степени доказана разрешимость задачи управления с обратной связью для одного класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

### Литература

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-е, доп. изд. / Москва: Либком, 2011. – 224 с.



2. Zvyagin V.G., Baranovskii E.S. Topological degree of condensing multi-valued perturbations of the  $(S)_+$ -class maps and its applications // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 170;3. – P. 405-422.
3. Барановский Е.С. Исследование задач оптимизации. Методы теории степени многозначных отображений монотонного типа / Saarbrücken: LAP, 2011. – 112 с.
4. Барановский Е.С. Об оптимальных задачах для систем параболического типа с асферичными множествами допустимых управлений // Известия вузов. Математика. – 2009. – 12. – С.74-79.
5. Барановский Е.С. Теоремы о структуре множества решений одного класса операторных включений и их приложения // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – 1. – С.71-80.
6. Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. Topological degree theories for densely mappings involving operators of type  $(S)_+$  // Adv. Differential Equations. – 1999. – 4;3. – P.413-456.
7. Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. The index of a critical point for nonlinear elliptic operators with strong coefficient growth // J. Math. Soc. Japan. – 2000. – 52;1. – P.109-137.
8. Kartsatos A.G., Skrypnik I.V. A new topological degree theory for densely defined quasibounded  $(\tilde{S}_+)$ -perturbations of multivalued maximal monotone operators in reflexive Banach spaces // Abstract and Applied Analysis. – 2005. – 2. – P.121-158.
9. Obukhovskii V., Zecca P., Zvyagin V. An oriented index for nonlinear Fredholm inclusions with nonconvex-valued perturbations // Abstract and Applied Analysis. – 2006. – P.1-21.
10. Gorniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 399 p.
11. Gorniewicz L., Granas A., Kryszewski W. On the homotopy method in the fixed point index theory for multi-mappings of compact absolute neighborhood retracts // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – 161;2. – P.457-473.
12. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач / М.: Наука, 1990. – 448 с.
13. Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev spaces. 2 ed./ Elsevier, Oxford, 2003. – 305 p.

**TOPOLOGICAL DEGREE FOR MULTIVALUED PERTURBATIONS  
OF DENSELY DEFINED OPERATORS OF MONOTONE TYPE  
AND ITS APPLICATIONS**

**E.S. Baranovskii**

Voronezh State University,  
Universitetskaya sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: [bes220@rambler.ru](mailto:bes220@rambler.ru)

**Abstract.** Introduction of the topological degree of multivalued perturbations of densely defined operators of type  $(S_+)$  is proposed. Basic properties of this topological characteristic are studied. The constructed concept is applied to feedback control problem for nonlinear elliptic equation.

**Key words:** topological degree, monotone type mappings, densely defined operators of the class  $(S_+)$ , multivalued maps, aspheric sets, feedback control, nonlinear elliptic problems.



УДК 519.6

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

А.Г. Брусенцев, О.В. Осипов

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,  
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия, e-mail: [brusentsev@mail.ru](mailto:brusentsev@mail.ru), [ov.osipov@gmail.com](mailto:ov.osipov@gmail.com)

**Аннотация.** Предлагается и обосновывается метод численного решения задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла. Приводится описание основанных алгоритмов и результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** плотность источников тепла, обратная задача теплопроводности, функция Грина, конечномерная аппроксимация, симплекс-метод.

Задача об оптимальном расположении источников тепловых полей всегда являлась актуальной задачей при проектировании в строительстве, металлургии и других областях техники. Она допускает ряд постановок, которые не эквивалентны из-за различий в критериях оптимизации. Здесь мы рассматриваем задачу нахождения плотности источников тепла минимальной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в некоторой области в условиях ее стационарного теплового баланса с окружающей средой. Возможные постановки и пути решения такой задачи обсуждались в [1]. С математической точки зрения эта задача относится к задачам оптимального управления для эллиптических краевых задач. Существование решений и общие свойства подобных задач для квадратичных целевых функционалов, а также приближенные методы их решения изучались рядом авторов (см. [2, 3], и приведенную там библиографию). Нашу задачу можно отнести также к обратным задачам теплопроводности (ОЗТ), методы приближенного решения которых рассмотрены в [4]. Однако и здесь речь идет, в основном, о квадратичном целевом функционале. В данной работе целевой функционал является линейным. Трудности в решении задачи порождены входящими в формулировку неравенствами, описывающими заданный температурный режим. Кроме того, отсутствие коэрцитивности у линейного функционала порождает трудности в установлении существования решения задачи. Мы видоизменяем формулировку задачи и строим конечномерную аппроксимацию этой задачи в виде последовательности задач линейного программирования, а также показываем, что эта аппроксимация обладает особым свойством регулярности по функционалу. Последнее свойство позволяет считать решение конечномерной задачи с достаточно большим номером, приближенным решением исходной задачи. В работе приводится также описание основанных на построенной аппроксимации вычислительных алгоритмов и результаты численных экспериментов.



### 1. Формальная постановка задачи и ее конечномерная аппроксимация

В ограниченной связной области  $D \subset R^m$  требуется определить функцию  $f(\vec{x}) \geq 0$ , доставляющую минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_D f(\vec{x}) dV_m \rightarrow \min, \tag{1}$$

при следующих условиях

$$\begin{aligned} \chi \Delta u + f &= 0, \\ (\partial u / \partial n + \beta u) |_{\partial D} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$M(\vec{x}) - T_0 \geq u(\vec{x}) \geq m(\vec{x}) - T_0. \tag{3}$$

Здесь  $\chi, T_0$  — известные константы,  $\beta = \beta(\vec{x})$  — известная функция, определенная на границе  $\partial D$ ,  $m(\vec{x}), M(\vec{x})$  — задаваемые в области  $D$  минимальный и максимальный профили температуры, которые считаются непрерывными функциями. Вводя функцию Грина  $G(\vec{x}, \vec{\xi})$  для оператора Лапласа с краевым условием (2), условия (2), (3) можно заменить следующими

$$m(\vec{x}) - T_0 \leq -\frac{1}{\chi} \int_{\vec{\xi} \in D} G(\vec{x}, \vec{\xi}) f(\vec{\xi}) dV_m \leq M(\vec{x}) - T_0, \quad f(\vec{x}) \geq 0, \quad f(\vec{x}) \in S(D). \tag{4}$$

В оптимизационной задаче (1), (4)  $S(D)$  является классом функций, среди которых разыскивается плотность источников  $f(\vec{x})$ . Ниже в качестве  $S(D)$  берется вещественное гильбертово пространство  $L_2(D)$  квадратично интегрируемых в  $D$  функций.

Построим конечномерную аппроксимацию задачи (1), (4) в виде задачи линейного программирования. Разобьем область  $D$  на  $n$  частей  $\left\{ D = \bigcup_{j=1}^n D_j \right\}$ . Определим подпространство  $S_n(D) \subset S(D)$  кусочно-постоянных функций вида  $f(\vec{x}) = f_j, \vec{x} \in D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Введем в  $S_n(D)$  базис, состоящий из функций  $e_j(\vec{x}) = 1, \vec{x} \in D_j$ , и  $e_j(\vec{x}) = 0, \vec{x} \notin D_j$ . Тогда  $f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n f_j e_j(\vec{x})$ . Рассмотрим на  $S(D)$  оператор

$$Gf = -(1/\chi) \int_{\vec{\xi} \in D} G(\vec{x}, \vec{\xi}) f(\vec{\xi}) dV_m.$$

Введем также обозначения  $a_{ij} = (Ge_i, e_j), (m(\vec{x}) - T_0, e_i(\vec{x})) = a_i, (M(\vec{x}) - T_0, e_i(\vec{x})) = b_i$ , где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2(D)$ . Построим конечномерную аппроксимацию задачи (1), (4)

$$\begin{aligned} J_n\{f\} &= \sum_{j=1}^n (\text{mes } D_j) f_j \rightarrow \min, \\ a_i &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \leq b_i, \quad f_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{5}$$



В одномерном случае ( $m = 1$ ) такая аппроксимация строится легко, т.к. нетрудно найти функцию Грина  $G(\vec{x}, \vec{\xi})$  в явном виде. Область  $D$  здесь является интервалом  $(a, b)$ , а краевая задача (2) примет форму

$$\chi \frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0, \quad \begin{cases} (du/dx - \beta_1 u)|_{x=a} = 0; \\ (du/dx + \beta_2 u)|_{x=b} = 0, \end{cases}$$

где  $\beta_1, \beta_2 > 0$  — некоторые константы. Функция Грина запишется в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} R_{ab}(x - l_b)(\xi + l_a), & \text{при } a \leq \xi \leq x; \\ R_{ab}(x + l_a)(\xi - l_b), & \text{при } x \leq \xi \leq a, \end{cases}$$

где  $R_{ab} = \beta_1 \beta_2 / (\beta_1 \beta_2 (b - a) + \beta_1 + \beta_2)$ ,  $l_a = (1 - \beta_1 a) / \beta_1$ ,  $l_b = (1 + \beta_2 b) / \beta_2$ .

При  $m > 1$  для построения задачи (5) численными методами находится функция  $u_i = Ge_i$ , которая является решением краевой задачи (2) с  $f = e_i$ . Далее задача (5) решается симплекс методом.

Отметим несколько естественных модификаций задачи (5). В случае достаточно большой функции  $M(\vec{x}) - T_0$ , условия сверху в (4) на решение задачи не влияют. После конечномерной аппроксимации получаем задачу без ограничений сверху ( $b_i = \infty$ ). Такую задачу будем называть *односторонней задачей вида* (5) и обозначать  $Z_0^+(n)$ . Двустороннюю задачу (5) обозначим  $Z_0(n)$ .

При постановке задачи до дискретизации, кроме условия (4), возможно появление и других условий, которые могут привести к некоторым новым модификациям задачи (5). Одна из естественных модификаций состоит в требовании невозможности расположения источников тепла в некоторой части области  $D$ , т. е. возникает дополнительное требование:  $f(\vec{x}) = 0$  при  $\vec{x} \in D_0 \subset D$ . Оно приводит к тому, что в задаче (5) уменьшается количество переменных. Исчезают некоторые слагаемые в целевой функции и ограничениях. Количество ограничений остается равным  $n$ .

Вторая модификация связана с присутствием некоторых фиксированных источников до оптимизации. Другими словами, функция  $f(\vec{x})$  в (1) состоит из двух слагаемых, одно из которых известная функция, а второе подлежит определению. После дискретизации для этого второго слагаемого получим задачу вида (5) с другими значениями чисел  $a_i, b_i$ . В целевой функции появится свободный член. И в этом случае вполне удобен симплекс метод. Разумеется, общая схема решения задачи останется неизменной и в случае совмещения последних двух модификаций, для которых возможен как двусторонний, так и односторонний варианты.

**Замечание 1.** Плотность источников  $f(\vec{x})$  в задаче (1), (4) можно варьировать без изменения значения целевого функционала  $J\{f\}$ . Действительно, используя формулу Гаусса-Остроградского и условия (2), получим

$$J\{f\} = \int_D f(\vec{x}) dV_m = -\chi \int_D \Delta u dV_m = -\chi \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \chi \int_{\partial D} \beta u ds.$$



Таким образом, значение целевого функционала полностью определяется значениями на границе  $\partial D$  функции  $u(\vec{x})$ , которая удовлетворяет краевым условиям (2), также заданным лишь на границе области. При этом функцию  $u(\vec{x})$  можно выбирать внутри области  $D$  произвольно, лишь бы удовлетворялось неравенство  $\Delta u \leq 0$ . То есть  $f(\vec{x}) = -\chi \Delta u(\vec{x})$  можно изменять, не меняя значения  $J\{f\}$ . Эти соображения показывают, что если задача (1), (4) имеет точное решение, то оно далеко не единственно. Кроме того, плотность источников  $f(\vec{x})$ , удовлетворяющую (4), при достаточно широких условиях можно изменить без изменения значения функционала  $J\{f\}$  так, чтобы ограничения сверху в (4) стали строгими неравенствами.

## 2. Уточнение постановки задачи.

### Регулярность конечномерной аппроксимации по функционалу

Ответ на вопрос о существовании точного решения задачи (1), (4) существенно зависит от класса функций  $S(D)$  и здесь мы этот вопрос не рассматриваем. В настоящей работе мы рассматриваем задачу отыскания плотности источников суммарной мощности сколь угодно близкой к нижней грани функционала при условиях (4). Обозначим  $\gamma = \inf_{f \in (4)} J\{f\}$ . Пусть также  $(J_n)_{\min}$  — минимальное значение целевой функции задачи (5) с  $n$  переменными.

**Определение.** Конечномерную аппроксимацию (5), (т.е. последовательность задач  $Z_0(n)$  или  $Z_0^+(n)$ ) назовем *регулярной по функционалу в классе  $S(D)$* , если справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (J_n)_{\min} \leq \gamma.$$

При наличии регулярности решение конечномерной задачи при достаточно большом  $n$  можно считать приближенным решением нашей уточненной задачи. Действительно, система ограничений в (5) означает, что неравенства в (4) удовлетворяются в среднем по  $D_j$ . При этом значение  $(J_n)_{\min}$  при достаточно больших  $n$  приближенно не превосходит  $\gamma$ .

Условия регулярности для последовательности задач  $Z_0^+(n)$  дает

**Теорема.** Пусть последовательность разбиений области  $D$  удовлетворяет условиям:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_j (\text{diam } D_j) = 0$ ;
2.  $\mu_n / \nu_n \leq C$ , где  $\mu_n = \max_j (\text{mes } D_j)$ ,  $\nu_n = \min_j (\text{mes } D_j)$ ,

а  $C$  — независимая от  $n$  константа. Если при всех  $\vec{x} \in D$  и некотором  $k_0 > 0$  выполнено неравенство  $m(\vec{x}) - T_0 \geq k_0$ , то последовательность односторонних конечномерных задач  $Z_0^+(n)$  регулярна по функционалу в классе  $L_2(D)$ .

Рассмотрим сначала задачу  $Z_\delta(n)$ , которая отличается от задачи  $Z_0(n)$  тем, что  $a_i$  и  $b_i$  в ней заменены на  $a_i - \delta$  и  $b_i + \delta$  при некотором  $\delta > 0$ . Обозначим через  $I_n(\delta)$  минимальное значение целевой функции задачи  $Z_\delta(n)$ .



**Лемма 1.** Если задача  $Z_0(n)$  имеет решение, то при любом  $\delta > 0$  справедливы неравенства

$$(J_n)_{\min} \geq I_n(\delta) \geq (J_n)_{\min} - \delta \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_i,$$

где  $\hat{y}_i (i = \overline{1, 2n})$  — координаты какой-нибудь точки максимума задачи, двойственной по отношению к  $Z_0(n)$ .

□ Поскольку точка минимума задачи  $Z_0(n)$  удовлетворяет системе ограничений задачи  $Z_\delta(n)$ , то справедливо неравенство  $(J_n)_{\min} \geq I_n(\delta)$ . Целевая функция задачи, двойственной по отношению к задаче  $Z_\delta(n)$ , имеет вид

$$I_n^T(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n a_i y_i - \sum_{i=1}^n b_i y_{i+n} - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i.$$

Согласно первой теореме двойственности, если обозначить через  $J_n^T(\vec{y})$  целевую функцию задачи, двойственной к  $Z_0(n)$ , а через  $\vec{y}^0$  точку максимума задачи двойственной к  $Z_\delta(n)$ , получим

$$I_n(\delta) = J_n^T(\vec{y}^0) - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i^0 \geq -J_n^T(\vec{y}_i) - \delta \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_i = (J_n)_{\min} - \delta \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_i,$$

что завершает доказательство леммы 1. ■

**Лемма 2.** Пусть  $(J_n)_{\min}$  и  $I_n(\delta)$  — минимальные значения целевых функций задач  $Z_0^+(n)$  и  $Z_\delta^+(n)$  соответственно. Тогда справедливы неравенства

$$(J_n)_{\min} \geq I_n(\delta) \geq (J_n)_{\min} \left( 1 - \frac{\delta}{\min_i a_i} \right).$$

□ Задачу  $Z_0^+(n)$  можно считать частным случаем задачи  $Z_0(n)$  при достаточно больших  $b_i$ . При этом, для точки минимума задачи  $Z_0(n)$  ограничения сверху в (5) являются строгими неравенствами, а это, в силу условий дополнительной нежёсткости, означает, что в точке максимума двойственной задачи  $\hat{y}_i = 0 (i = \overline{n, 2n})$ . Поэтому  $(J_n)_{\min} = J_n^T(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{y}_i \geq (\min_i a_i) \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_i$ . Отсюда и из леммы 1 вытекает справедливость леммы 2. ■

**Лемма 3.** Для произвольного числа  $\alpha > 0$  и любой функции  $\varphi(\vec{x}) \in L_2(D)$  найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что при выполнении для разбиения области  $D$  неравенства  $\max_j (\text{diam} D_j) < \varepsilon$  можно выбрать кусочно-постоянную функцию  $f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n f_j e_j(\vec{x})$ , для которой выполнены условия  $J\{f\} = J\{\varphi\}$ ,  $\|f - \varphi\| < \alpha$ , где  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2(D)$ .

□ Хорошо известно, что для любой функции  $\varphi(\vec{x}) \in L_2(D)$  можно найти такую функцию  $\psi(\vec{x}) \in C_0(G)$ , что  $\|\psi - \varphi\| < \alpha/2$ . Ввиду равномерной непрерывности  $\psi(\vec{x})$



существует такое  $\varepsilon > 0$ , что при условии  $\max_j (\text{diam } D_j) < \varepsilon$  можно найти кусочно-постоянную функцию  $f_1(\vec{x})$ , для которой  $\|f_1 - \psi\| < \alpha/2$  или  $\|f_1 - \varphi\| < \alpha$ . Зафиксируем разбиение области  $D$  и рассмотрим задачу на минимум для функции  $n$  переменных  $\Phi(f) = \|f - \varphi\|^2 = \sum_{i=1}^n (f_i^2 \cdot (\text{mes } D_i) - 2f_i \cdot (\varphi, e_i)) + \|\varphi\|^2$ . В стационарной точке справедливы равенства  $f_i \cdot (\text{mes } D_i) - (\varphi, e_i) = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Поэтому выбирая  $f_i = (\varphi, e_i) / \text{mes } D_i$ , получим кусочно-постоянную функцию  $f(\vec{x})$ , для которой  $J\{f\} = J\{\varphi\}$ ,  $\|f - \varphi\| < \alpha$ .

□ Доказательство теоремы. Пусть  $\alpha$  — произвольное положительное число. Выберем функцию  $0 \leq \varphi(\vec{x}) \in L_2(D)$ , удовлетворяющую левому неравенству в (4), такую, что  $J\{\varphi\} - \gamma < \alpha$ . Согласно лемме 3 вследствие условия 1) теоремы, для всякого разбиения области  $D$ , связанного с задачей  $Z_0^+(n)$  при достаточно большом  $n$ , найдется кусочно-постоянная функция  $f(\vec{x})$ , для которой выполнены условия  $J\{f\} = J\{\varphi\}$ ,  $\|f - \varphi\| < \alpha$ . Эта функция может не удовлетворять левому неравенству в (4). Однако она удовлетворяет системе ограничений задачи  $Z_\delta^+(n)$  при достаточно большом  $n$  и некотором  $\delta > 0$ . Действительно  $G\varphi = Gf + G(\varphi - f) \geq m(\vec{x}) - T_0$ . Умножим скалярно в  $L_2(D)$  обе части неравенства на  $e_i(\vec{x})$ . Получим

$$(Gf, e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \geq a_i - (G(\varphi - f), e_i) \geq a_i - \|G\|(\text{mes } D_i) \|\varphi - f\| \geq a_i - \|G\| \mu_n \alpha.$$

Тем самым показано, что  $f(\vec{x})$  удовлетворяет системе ограничений задачи  $Z_\delta^+(n)$  с  $\delta = \|G\| \mu_n \alpha$ . Отсюда, если учесть лемму 2 и условия теоремы, получим

$$J\{f\} \geq I_n(\delta) \geq (J_n)_{\min} (1 - \|G\| \mu_n (\nu_n k_0)^{-1} \alpha) \geq (J_n)_{\min} (1 - \|G\| C k_0^{-1} \alpha).$$

Таким образом, для любого сколь угодно малого  $\alpha > 0$  найдется такой номер  $N_\alpha$ , что при  $n \geq N_\alpha$  выполнено неравенство  $(J_n)_{\min} \leq (\gamma + \alpha)(1 - \|G\| C k_0^{-1} \alpha)^{-1}$ , которое и доказывает теорему. ■

Эта теорема точно также доказывается для других, упомянутых выше, односторонних модификаций рассматриваемой задачи.

**Замечание 2.** Регулярность по функционалу последовательности двусторонних задач  $Z_0(n)$  легко устанавливается по приведенной схеме, если для задач  $Z_0(n)$  и  $Z_\delta(n)$  удастся доказать справедливость леммы 2. Ее доказательство сводится к установлению существования точки минимума задачи  $Z_0(n)$ , для которой правые неравенства в (5) являются строгими. В пользу существования такой точки минимума говорит замечание 1.

### 3. Описание алгоритмов и результаты численных экспериментов

Для приближенного решения задачи (1), (4) с  $m = 1, 2, 3$  создан программный комплекс HeatCore. Он использует сведение задачи к задаче (5) при равномерном разбиении



области по каждой координатной оси. На блок-схеме на рис. 1 приведен общий алгоритм решения  $m$ -мерной задачи с использованием численного метода для вычисления коэффициентов  $a_{ij}$ . Прямая задача (2), сведённая к разностному уравнению  $\Delta u = e_j$ , составленному интегро-интерполяционным методом [5] (методом баланса), решается методом Гаусса на сетке, частота которой по каждой оси в  $\nu$  раз больше количества разбиений по соответствующей оси. В одномерном случае предусмотрена возможность получения значений коэффициентов  $a_{ij}$  аналитическим путем. Сравнение результатов при различных способах (аналитическом и приближенном) определения  $a_{ij}$  показывает приемлемость приближенного нахождения этих коэффициентов. При  $m > 1$  для достижения приемлемой точности определения  $a_{ij}$  необходимо значительное машинное время. Для случая  $m = 2$  проведено большое количество экспериментов на различных областях. Удалось произвести также просчет нескольких вариантов при  $m = 3$ .

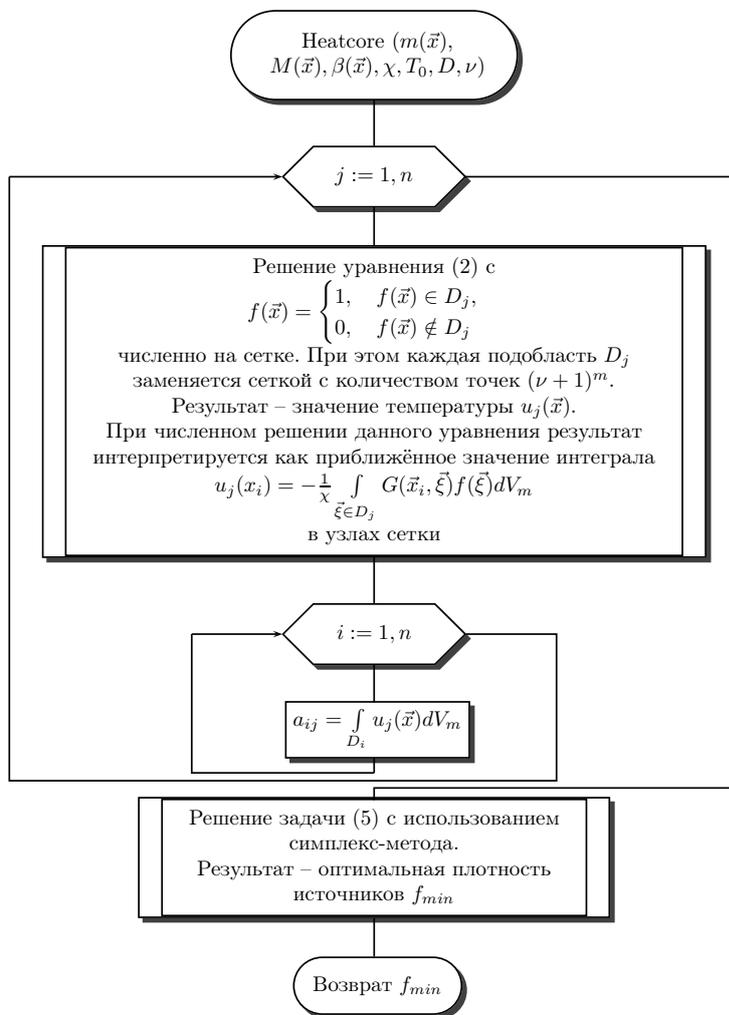


Рис. 1. Блок-схема алгоритма решения  $m$ -мерной задачи.

Вычисления показывают, что с ростом  $n$  последовательность  $(J_n)_{\min}$  довольно быстро стабилизируется. При этом оптимальная плотность источников имеет несколько от-



дельных зон локализации возрастающей остроты. На рис. 2 представлен результат численного решения задачи (5) для отрезка ( $m = 1$ ). Для изображённых здесь результатов решения задачи при аналитическом вычислении  $a_{ij}$ , уже при 7 разбиениях минимум полностью стабилизируется и равен  $J_{\min} = 65 \text{ K}^\circ \cdot \text{м/с}$ .

Отметим, что при численном нахождении этих коэффициентов  $J_{\min}$  также оказывается равным 65, независимо от частоты сетки. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 2 приведено сравнение результатов при выбранном произвольно расположении источников (кривые серого цвета) с найденным методически (чёрного цвета). Оба распределения источников соответствуют одному температурному коридору. Оптимизация распределения источников в данном примере экономит  $(76,25 - 65)/65 \cdot 100\% \approx 17,3\%$  тепловой энергии.

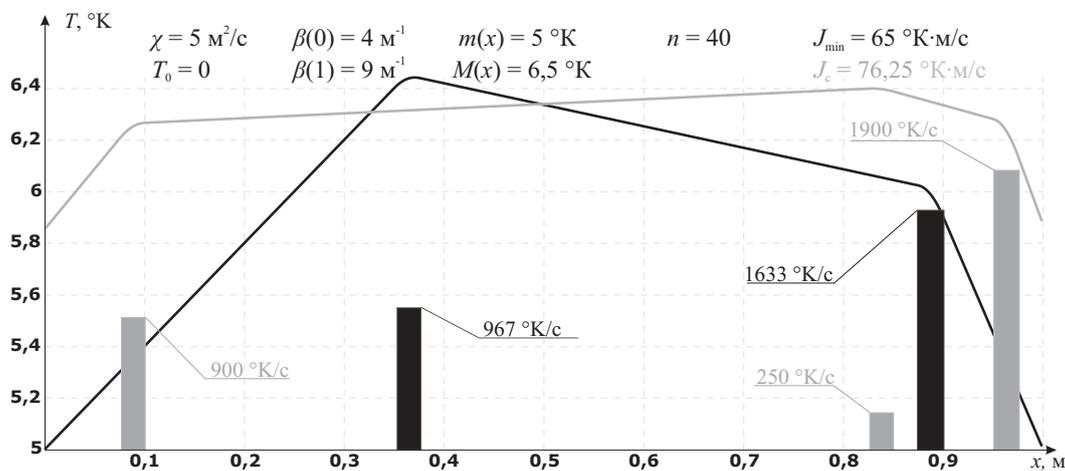


Рис. 2. Оптимальное и не оптимальное распределение плотностей источников  $f$  и соответствующих температур  $T$  на отрезке.

На рис. 3 представлен результат решения задачи (5) для квадрата ( $m = 2$ ).

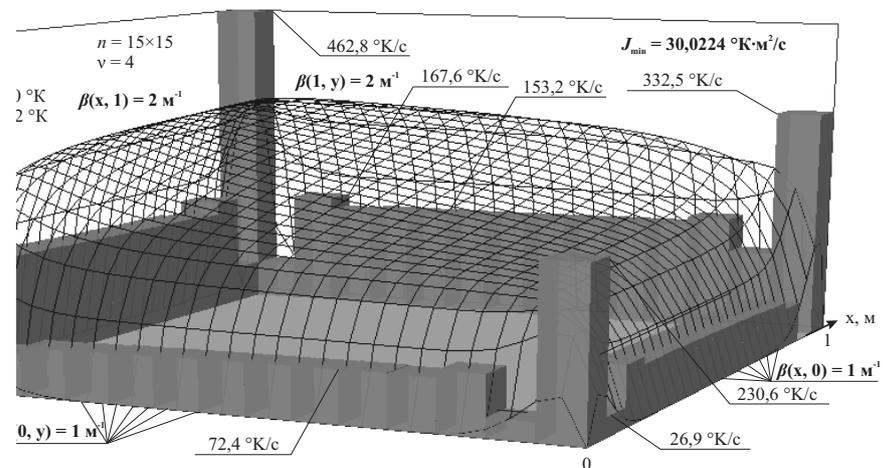


Рис. 3. Распределение оптимальной плотности источников  $f$  и соответствующей температуры  $T$  в квадрате.



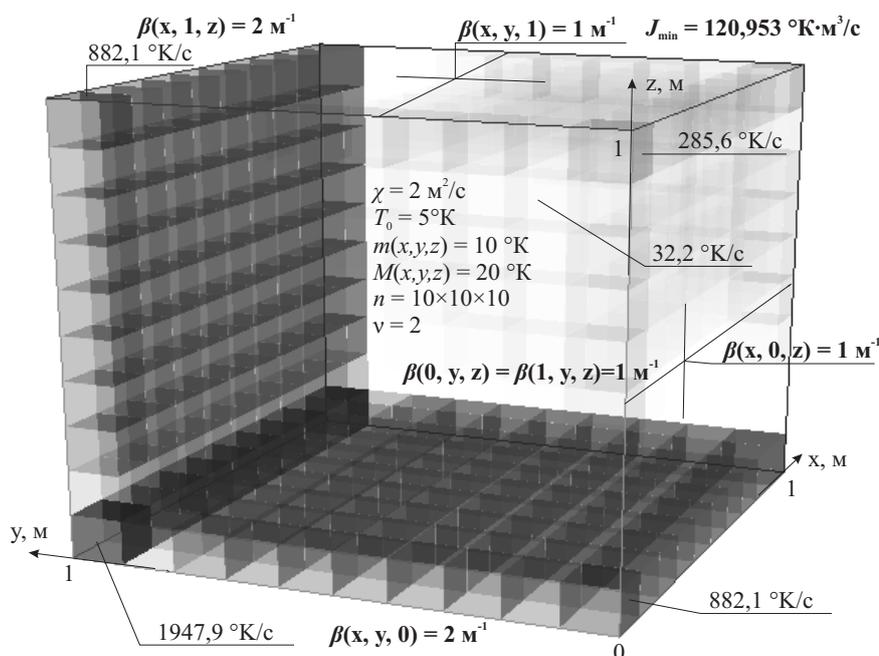
В таблицу сведены результаты численных экспериментов для области, представленной на Рис. 3. Для решения задачи область разбивалась на  $n$  частей, и расчеты производились на различных сетках с коэффициентами теплопроводности, равными  $5 \text{ м}^2/\text{с}$  и  $100 \text{ м}^2/\text{с}$ . Как показывает эксперимент, с ростом коэффициента теплопроводности значение функционала стабилизируется быстрее, и увеличение частоты сетки не оказывает большого влияния на точность.

Таблица 1

Зависимость значения функционала  $(J_n)_{\min}$  от  $n$ 

$n$	$\nu = 2$		$\nu = 4$		$\nu = 6$	
	$\chi = 5 \text{ м}^2/\text{с}$	$\chi = 100 \text{ м}^2/\text{с}$	$\chi = 5 \text{ м}^2/\text{с}$	$\chi = 100 \text{ м}^2/\text{с}$	$\chi = 5 \text{ м}^2/\text{с}$	$\chi = 100 \text{ м}^2/\text{с}$
$3 \times 3$	30,56674	30,02876	30,59955	30,03027	30,60560	30,03055
$5 \times 5$	30,18947	30,00955	30,20090	30,01010	30,20302	30,01020
$7 \times 7$	30,09682	30,00487	30,10256	30,00515	30,10362	30,00520
$10 \times 10$	30,04754	30,00239	30,05032	30,00252	30,05083	30,00255
$15 \times 15$	30,02116	30,00106	<b>30,0224</b>	30,00112	—	—
$20 \times 20$	30,01191	30,00060	30,01260	30,00063	—	—
$30 \times 30$	30,00530	30,00027	—	—	—	—
$40 \times 40$	30,00298	—	—	—	—	—

На следующем рисунке представлена область ( $m=3$ ) с оптимальными источниками, закрашенными тем темнее и непрозрачнее, чем выше их плотность.

Рис. 4. Распределение оптимальной плотности источников  $f$  в кубе.



### Литература

1. Брусенцев А.Г., Брусенцева В.С. Задача об оптимальном выборе источников тепла // Сб. трудов XXIII международной конференции «Математические методы в технике и технологиях». Т.2. – 2010. – С.43-46.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / М.: Мир, 1972. – 412 с.
3. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / М.: Наука, 1978. – 497 с.
4. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена / М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем / М.: Наука, 1977. – 656 с.

### APPROXIMATE SOLUTION OF THE OPTIMAL CHOICE PROBLEM OF HEAT SOURCES

A.G. Brusentsev, O.V. Osipov

Belgorod State Technological University named after V.G. Shuchov,  
Kostyukova st., 46, Belgorod 308012, Russia, e-mail: [brusentsev@mail.ru](mailto:brusentsev@mail.ru), [ov.osipov@gmail.com](mailto:ov.osipov@gmail.com)

**Abstract.** Method of numerical solution of optimal choice problem connected the heat sources density is proposed and justified. Description of algorithms based on the method and numerical results are given.

**Key words:** heat sources density, inverse problem of heat conduction, Green's function, finite-dimensional approximation, simplex method.



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ-ТЕЙЛОРА В ЗАДАЧЕ МАСКЕТА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ<sup>8)</sup>

О.В.Гальцев

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: [oleggaltsev@yandex.ru](mailto:oleggaltsev@yandex.ru)

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена моделированию совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористых средах. Жидкости имеют различную плотность и изначально разделены свободной границей. Рассматриваются результаты численного моделирования задач со свободной границей на микроскопическом уровне для абсолютно твердого и упругого скелета различной геометрии. Эти задачи имеют естественный малый параметр  $\varepsilon$ , который представляет собой отношение среднего размера поры к размеру рассматриваемой области. Если уменьшать параметр  $\varepsilon$ , то решения микроскопических уравнений моделируют усредненную картину движения жидкостей. Для движения жидкостей в упругом грунте присутствует поверхность контактного разрыва, в то время, как при движении жидкостей в абсолютно твердом скелете вместо свободной границы имеется переходная фаза, занятая смесью двух жидкостей.

**Ключевые слова:** задача Маскета, задача со свободной границей, фильтрация жидкости.

### 1. Проблема Маскета

Неустойчивость Рэля-Тейлора (см. [1], [2]) представляет собой неустойчивость границы раздела двух жидкостей различной плотности, которая возникает, когда более легкая жидкость толкает более тяжелую. Эквивалентная ситуация возникает, когда сила тяжести действует на две жидкости разной плотности – более плотная жидкость находится над жидкостью меньшей плотности. В настоящей работе мы будем рассматривать рэлей-тейлоровскую неустойчивость неоднородной жидкости, заполняющей поры в твердом скелете. В дополнение к несомненному теоретическому интересу, эта задача имеет важное практическое значение. Например, описание вытеснения одной жидкости другой в пористой среде. Решение этой проблемы связано с выбором правильной математической модели.

Существует много различных типов математических моделей, но мы будем иметь дело только с классом моделей, которые мы называем *физически корректными*. Феноменологическую модель будем считать физически корректной, если она является одной из базовых моделей механики сплошных сред (как, например, уравнение Стокса для медленного движения вязкой жидкости, или уравнение Ламэ для перемещений упругого скелета), или асимптотически близкой к какой-либо физически корректной феноменологической модели.

<sup>8</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613).

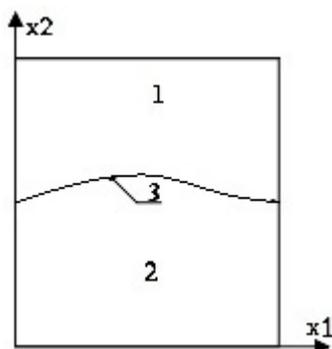


Рис. 1. 1 – область  $\Omega^+(t)$ , 2 – область  $\Omega^-(t)$ , 3 – свободная граница  $\Gamma(t)$ .

Среди математических моделей, описывающих совместное движение двух несмешивающихся жидкостей, наиболее верной (физически корректной) является задача Маскета, предложенная М. Маскетом [3]. Эта модель описывает процесс фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной вязкости и плотности, разделенных некоторой подвижной (свободной) границей. Движение первой жидкости под воздействием силы тяжести в области  $\Omega^+(t)$  с постоянной вязкостью  $\mu$  и постоянной плотностью  $\rho_f^+$  описывается системой уравнений Дарси

$$\mathbf{v}^+ = -\frac{k}{\mu} \nabla p_f^+ + \rho_f^+ \mathbf{e}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad (1)$$

для микроскопической скорости  $\mathbf{v}^+$  и давления  $p_f^+$  жидкости. Единичный вектор  $\mathbf{e}$  совпадает с направлением силы тяжести.

Соответственно, движение второй жидкости под воздействием силы тяжести в области  $\Omega^-(t)$  с постоянной вязкостью  $\mu$  и постоянной плотностью  $\rho_f^-$  описывается системой уравнений Дарси

$$\mathbf{v}^- = -\frac{k}{\mu} \nabla p_f^- + \rho_f^- \mathbf{e}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (2)$$

для микроскопической скорости  $\mathbf{v}^-$  и давления  $p_f^-$ . На общей свободной границе

$$\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^-(t)$$

давления жидкостей и их нормальные скорости непрерывны:

$$p_f^+ = p_f^-, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор нормали к границе  $\Gamma(t)$  в точке  $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$  и  $V_n$  – скорость в нормальном направлении к границе  $\Gamma(t)$  в точке  $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$ .

Условие (4) означает, что граница  $\Gamma(t)$  есть материальная поверхность. Иными словами, во время движения, она состоит из постоянного количества материальных точек.



Этот факт позволяет сформулировать слабую постановку задачи Маскета. Определим давление  $p_f$  неоднородной жидкости

$$p_f = p_f^+ \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad p_f = p_f^- \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t),$$

плотность  $\rho_f$

$$\rho_f = \rho_f^+ \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \rho_f = \rho_f^- \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t),$$

и скорость  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^- \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t).$$

Таким образом неизвестные функции  $\mathbf{v}$ ,  $p_f$ , и  $\rho_f$  будут решениями системы уравнений фильтрации Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p_f + \rho_f \mathbf{e}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

и уравнения переноса

$$\frac{d\rho_f}{dt} \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

Первое уравнение в (5) (закон Дарси) следует понимать в обычном смысле почти всюду в  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ , а второе уравнение (уравнение неразрывности) понимается в смысле теории распределения. Уравнение переноса понимается также в смысле теории распределения, если использовать равенства

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mu = \nabla \cdot (\mathbf{v}\mu), \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho_f).$$

Проблема дополняется однородным граничным условием

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S = \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  есть нормальный вектор к границе  $S$ , и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

с разрывными начальными значениями:

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^+ \text{ и } \rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^-, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega^-.$$

Считается, что задачу Маскета можно рассматривать в двух случаях. В обоих случаях проблему легко сформулировать, но почти невозможно решить. По этой причине известно очень мало работ о ее классическом или слабом решении. Существует несколько работ о классической разрешимости локальной или глобальной во времени задачи, но до сих пор нет каких-либо результатов по слабой разрешимости (см. [4], [5], [6]).

Следуя схеме, предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером [7], попытаемся найти более общую физически корректную математическую модель, описывающую тот же



процесс. Чтобы объяснить идею, во-первых, мы рассмотрим систему фильтрации Дарси, которая отвечает за динамику в задаче Маскета. Хорошо известно, что эта система есть асимптотический предел уравнения Стокса для несжимаемой вязкой жидкости, когда размер пор стремится к нулю (см. [7], [8]). Р.Барридж и Дж.Келлер предложили рассматривать более общую систему

$$\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left( \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I} \right) + \rho^\varepsilon \mathbf{e}, \quad (9)$$

$$p + \alpha_p \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (10)$$

для перемещения  $\mathbf{w}$  и давления  $p$ . Микроскопические системы (9), (10) описывают совместное движение вязкой жидкости в поровом пространстве и упругого скелета и понимаются в смысле теории распределения. Эта система содержит уравнение Стокса для вязкой жидкости в поровом пространстве  $\Omega_f$ , уравнение Ламэ для твердого скелета в  $\Omega_s$  и граничное условие (непрерывность нормальных напряжений) на общей границе  $\Gamma = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$ . В (9)  $\mathbb{D}(x, \mathbf{w})$  есть симметричная часть  $\nabla \mathbf{w}$ ,  $\chi^\varepsilon$  – характеристическая функция порового пространства  $\Omega_f$ ,  $\varepsilon = l/L$  – безразмерный размер пор,

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0},$$

$$\rho^\varepsilon = \rho_f \chi^\varepsilon + \rho_s (1 - \chi^\varepsilon), \quad \alpha_p = c_f^2 \chi^\varepsilon + c_s^2 (1 - \chi^\varepsilon),$$

$l$  – средний размер пор,  $L$  – характерный размер рассматриваемой области,  $\tau$  есть характерное время процесса,  $\rho_f$  и  $\rho_s$  – безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета, отнесенные к средней плотности воды  $\rho_0$ ,  $c_f$  и  $c_s$  есть, соответственно, безразмерные скорости звука в жидкости и твердом скелете,  $g$  есть значение ускорения силы тяжести,  $\mu$  – вязкость жидкости, и  $\lambda$  – постоянная упругости Ламэ. В дальнейшем будем предполагать, что структуры областей  $\Omega_f$  и  $\Omega_s$  периодические с периодом  $\varepsilon$ . То есть  $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)$  с 1 – периодической функцией  $\chi(\mathbf{y})$ .

Теоретически система (9), (10) с соответствующими граничными и начальными условиями наиболее точно описывает данный физический процесс, но они все еще не имеют никакого практического значения. Оно появляется только после усреднения. Все предельные режимы системы (9), (10) зависят от безразмерного параметра  $\alpha_\tau$ ,  $\alpha_\mu$ ,  $\alpha_\lambda$  [9]. Например, для фильтрации  $\alpha_\tau \sim 0$ , для абсолютно твердого скелета  $\alpha_\lambda \sim \infty$ , и для несжимаемой среды  $\alpha_p \sim \infty$ . Таким образом, мы можем рассматривать эти параметры, как некоторые переменные значения в процессе перехода к пределу, и вместо стандартного предельного режима (когда все параметры фиксированы) получим несколько осредненных моделей, асимптотически близких к основной. Все эти модели описывают тот же физический процесс, но с разной мерой приближения.

Для фильтрации несжимаемой жидкости в несжимаемом твердом скелете стандартная усредненная модель для фиксированных  $\alpha_\mu = \mu_0$ ,  $\alpha_\lambda = \lambda_0$ , и  $\alpha_\tau = \tau_0$  имеет вид

$$\tau_0 \hat{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \hat{\mathbb{P}} + \hat{\rho} \mathbf{e}, \quad \hat{\rho} = m \rho_f + (1 - m) \rho_s,$$



$$\widehat{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + \lambda_0 \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t - \tau) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(x, \tau)) d\tau.$$

Система (9), (10) на микроскопическом уровне имеет другие асимптотические пределы, чем система фильтрации Дарси ( $\alpha_\tau = 0$ ,  $\alpha_p = \infty$ ,  $\alpha_\lambda = \infty$ ,  $\alpha_\mu = \mu_1 \varepsilon^2$ ):

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_1} \mathbb{B}^f \cdot (-\nabla p + \rho_f \mathbf{e}), \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0,$$

или система Био-Терцаги для пороупругости ( $\alpha_\tau = 0$ ,  $\alpha_p = \infty$ ,  $\alpha_\lambda = \lambda_0$ ,  $\alpha_\mu = \mu_1 \varepsilon^2$ ) (см. [9], [10], [11]):

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1} \mathbb{B}^f \cdot (-\nabla p + \rho_f \mathbf{e}),$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (1 - m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\nabla \cdot (\lambda_0 \mathfrak{N}_0 : \mathbb{D}(x, \mathbf{u})) - \nabla p + \hat{\rho} \mathbf{e} = 0,$$

или система вязкоупругой фильтрации

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbb{P}} - \nabla p + \hat{\rho} \mathbf{e} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0,$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathfrak{N}_4 : \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + \lambda_0 \mathfrak{N}_5 : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_6(t - \tau) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}(x, \tau)) d\tau.$$

Эту схему мы можем применить к задаче со свободной границей, которая на микроскопическом уровне для фильтрации в несжимаемой среде будет иметь вид

$$\nabla \cdot \left( \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I} \right) + \rho^\varepsilon \mathbf{e} = 0, \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d\rho^\varepsilon}{dt} \equiv \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \rho^\varepsilon = 0. \quad (13)$$

Задача наиболее полно изучена в [12]. Основные результаты говорят о том, что для любой  $\varepsilon > 0$  существует слабое решение  $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, \rho^\varepsilon\}$  задачи со свободной границей (11) – (13) и для  $\alpha_\mu = \mu_0$ ,  $\alpha_\lambda = \lambda_0$  соответствующие последовательности сходятся при  $\varepsilon \searrow 0$  к решению  $\{\mathbf{w}, p, \rho\}$  (усредненной) задачи Маскета для вязкоупругой фильтрации

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbb{P}} - \nabla p + \rho \mathbf{e} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (14)$$

При доказательстве этого результата было использовано понятие двух - масштабной сходимости [13].

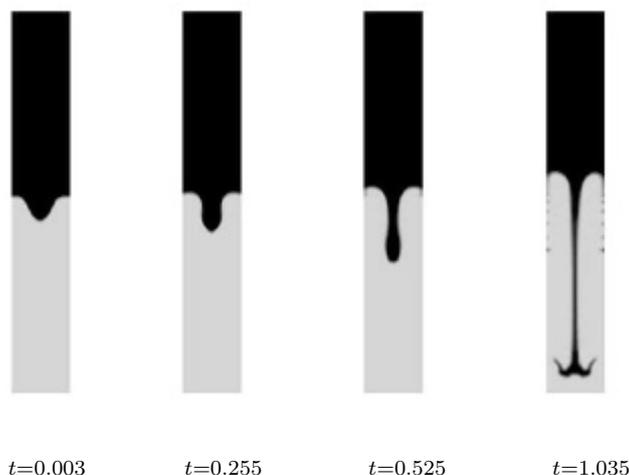


Рис. 2. Поверхность контактного разрыва в различные моменты времени.

С другой стороны формальный предел  $\varepsilon \searrow 0$  в (11) – (13) для  $\alpha_\lambda \rightarrow \infty$  и  $\alpha_\mu = \mu_1 \varepsilon^2$  ведет к задаче Маскета (5), (6). Понятно, что тот же формальный предел можно получить, если в качестве базовой модели на микроскопическом уровне будем рассматривать задачу со свободной границей для системы Стокса

$$\nabla \cdot (\mu_1 \varepsilon^2 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) - p^\varepsilon \mathbb{I}) + \rho^\varepsilon \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t > 0, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad \frac{d\rho^\varepsilon}{dt} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t > 0, \quad \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_f^\varepsilon, t > 0, \quad (16)$$

только в поровом пространстве  $\Omega_f^\varepsilon$ . Последняя проблема была изучена в [14], где авторы доказали, что для любой  $\varepsilon > 0$  задача (15) имеет единственное классическое решение  $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, \rho^\varepsilon\}$ .

Целью настоящей работы является компьютерное моделирование задачи (11) – (13) с  $\alpha_\mu = \mu_0$ ,  $\alpha_\lambda = \lambda_0$ , и задачи (15), (16) для двух различных структур порового пространства: несвязные капилляры и несвязный твердый скелет в единичном квадрате  $\mathbb{R}^2$ .

Численное решение этой задачи в одном капилляре в абсолютно твердом скелете показало совпадение с результатами [15]. На рис. 2 можно увидеть гладкую свободную границу в капилляре в различные моменты времени.

Мы показали, что движение жидкостей в (15), (16) зависит от трех факторов: отношения  $\delta = \rho^+ / \rho^-$  плотностей  $\rho^+$  и  $\rho^-$  верхней и нижней жидкостей, вязкости  $\mu$  жидкостей и размера пор  $\varepsilon$ . Изменяя эти параметры, можно получить различные сценарии развития неустойчивости Рэлея-Тейлора. Для задачи (11) – (13) процесс зависит от тех же параметров  $\delta, \mu, \varepsilon$ , как и ранее, и дополнительно параметра коэффициента упругости Ламэ  $\lambda$ .

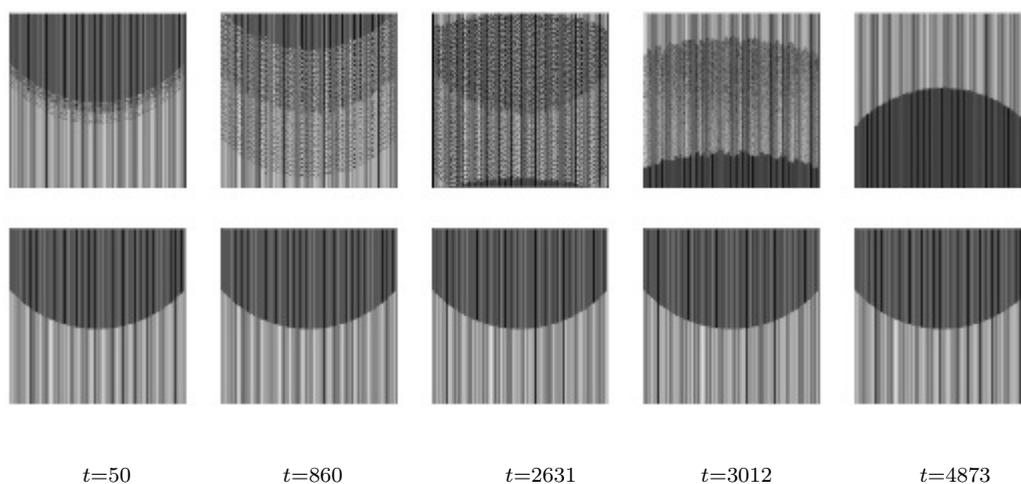


Рис. 3. Несвязные капилляры: численное моделирование для абсолютно твердого скелета (сверху) и для упругого скелета (снизу).

Процесс численного усреднения ( $\varepsilon \searrow 0$ ) моделируется увеличением количества капилляров для первой геометрии, или количества элементов твердого скелета для второй геометрии. Таким образом, можно считать, что при достаточно малом  $\varepsilon$  система (15), (16) описывает классическую задачу Маскета, а система (11) – (13) описывает задачу Маскета вязкоупругой фильтрации.

На рисунке рис. 3 показаны результаты численного моделирования для первой геометрии задачи (15), (16) движения в абсолютно твердом скелете (сверху), и задачи (11) – (13) движения в упругом скелете (снизу).

На рис. 4 можно видеть случай упругого скелета в большем масштабе, чтобы лучше рассмотреть изменение свободной поверхности раздела фаз.

Кроме того, проводились численные расчеты для различных значений  $\lambda$  и  $\delta$ :

- для  $\varepsilon = 2 * 10^{-5}$ ,  $\lambda \searrow 0$  и  $\delta = 1.25$  наблюдается изменение поверхности раздела жидкостей;
- для  $\varepsilon = 2 * 10^{-5}$ ,  $\lambda = 0.5$  и  $\delta \searrow \infty$  наблюдается изменение поверхности раздела жидкостей;
- для  $\varepsilon = 2 * 10^{-5}$ ,  $\lambda = 0.5$  и  $\delta \searrow 1$  изменения поверхности раздела жидкостей не наблюдается.

Такой же вывод справедлив для случая второй геометрии (несвязный твердый скелет). На рис. 5 показаны сравнительные результаты для аналогичных значений  $\delta$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $\rho_s$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  (см. Таблица 1) и тех же начальных значений.

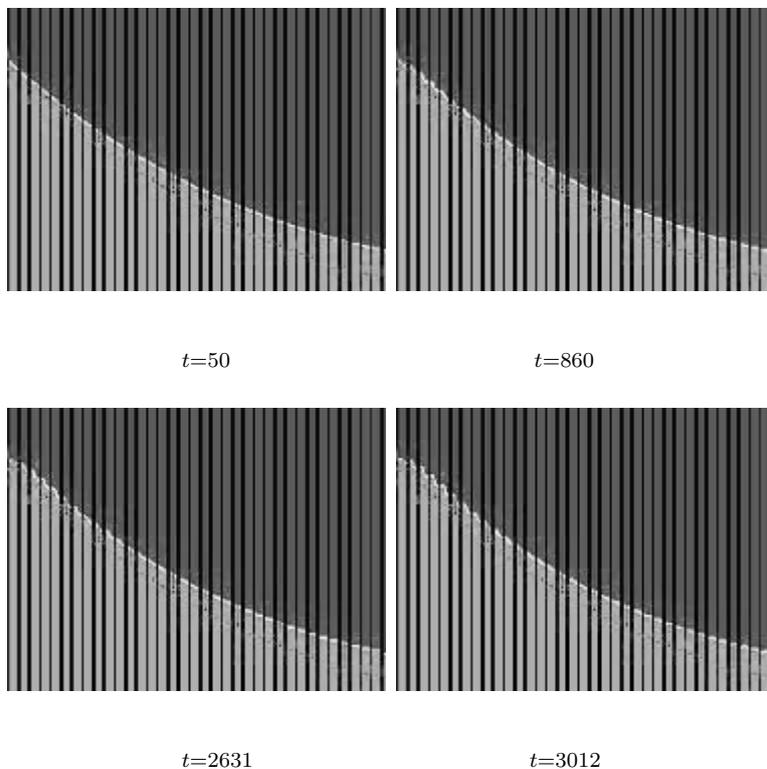


Рис. 4. Случай упругого скелета в большом масштабе.

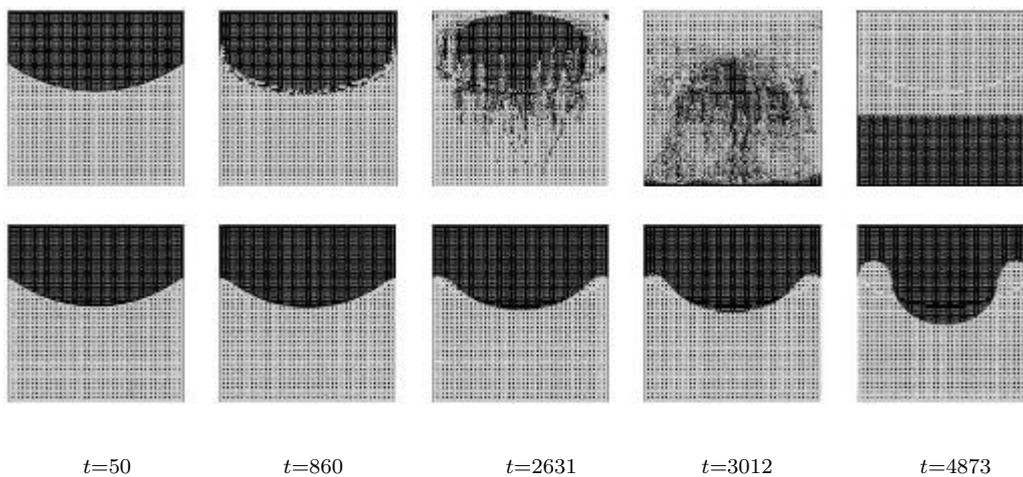


Рис. 5. Несвязный скелет: численное моделирование для абсолютно твердого скелета (сверху) и для упругого скелета (снизу).



Таблица 1

Значения параметров для случаев абсолютно твердого скелета и упругого скелета

Параметр	Абсолютно твердый скелет	Упругий скелет
$\rho_f^+$	998.2	998.2
$\rho_f^-$	800	800
$\rho_s$	—	2000
$\mu^+$	$10^{-2}$	$10^{-2}$
$\mu^-$	$9 * 10^{-1}$	$9 * 10^{-1}$
$\lambda$	—	0.5
$\varepsilon$	$2 * 10^{-5}$	$2 * 10^{-5}$
$L$	100	100

Легко заметить, что для одного и того же времени процесса в задаче Маскета возникает переходная фаза (см. [16]), в то время как при вязкоупругой фильтрации, свободная граница сохраняется.

Как и в случае геометрии первого типа, были проведены численные расчеты для различных значений  $\lambda$  and  $\delta$ :

- для  $\delta = 1.25$ ,  $\varepsilon = 2 * 10^{-5}$  и  $\lambda \searrow 0$ , наблюдается изменение поверхности раздела жидкостей;
- для  $\delta \searrow \infty$ ,  $\varepsilon = 2 * 10^{-5}$  и  $\lambda = 0.5$ , наблюдается изменение поверхности раздела жидкостей и процесс фильтрации протекает быстрее с увеличением  $\delta$ ;
- для  $\delta = 1.25$ ,  $\varepsilon = 2 * 10^{-5}$  и  $\lambda \searrow \infty$ , наблюдается изменение поверхности раздела жидкостей и процесс фильтрации протекает быстрее с увеличением  $\lambda$ .

На основе численного моделирования можно сделать вывод, что:

1) при движения жидкости в абсолютно твердом скелете вместо свободной границы возникает переходная фаза, в то время, как при движении жидкостей в упругом скелете сохраняется свободная граница;

2) за одно и то же время развития процесса, жидкости в абсолютно твердом скелете полностью поменялись местами, в то время, как жидкости в упругом скелете все еще сохраняют свое положение.

Таким образом, решение модели вязкоупругой фильтрации – классическое и обладает гладкой и устойчивой свободной границей, в то время, как решение задачи Маскета в лучшем случае будет только обобщенным с переходной фазой вместо свободной границей.



## 2. Постановка задачи

**2.1. Абсолютно твердый скелет.** Предположим, что  $\Omega$  единичный квадрат  $(0 < x_1 < 1) \times (0 < x_2 < 1)$ ,  $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup S^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$ , где  $\Omega_f^\varepsilon$  поровое пространство (область, занятая жидкостью),  $\Omega_s^\varepsilon$  – твердый скелет и  $S^\varepsilon$  есть поверхность «твердый скелет – поровое пространство».

Для геометрии задачи первого типа поровое пространство представляет собой набор изолированных капилляров

$$\Omega_f^\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{n-1} (\varepsilon k < x_1 < \varepsilon(k+1)m) \times (0 < x_2 < 1).$$

Здесь  $\varepsilon = 1/n$ ,  $m$  – пористость,  $0 < m < 1$ .

Для геометрии второго типа твердый скелет есть объединение несвязных квадратов

$$\Omega_s^\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{n-1} (\varepsilon(k+1)\beta < x_1 < \varepsilon(k+1)(1-\beta)) \times (\varepsilon(k+1)\beta < x_2 < \varepsilon(k+1)(1-\beta)), \quad 2\beta = 1 - \sqrt{m}.$$

Как мы уже отмечали выше, две несмешивающиеся жидкости моделируются неоднородной жидкостью, где плотность  $\rho$  может принимать только два значения  $\rho^+$  или  $\rho^-$ . Скорость  $\mathbf{v}$ , давление  $p_f$  и плотность  $\rho_f$  неоднородной жидкости в поровом пространстве  $\Omega_f^\varepsilon$  описываются системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - p_f \mathbb{I}) - \rho_f \mathbf{e}_2 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (17)$$

и уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = 0. \quad (18)$$

Дифференциальные уравнения (2.1) и (2.2) дополняются условием нормализации

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} p_f(\mathbf{x}, t) dx = 0, \quad (19)$$

и однородным граничным условием

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in S \cup S^\varepsilon, \quad t > 0, \quad (20)$$

где  $S = \partial\Omega$ , и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \quad (21)$$

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+ = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_f^+ = \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega^+,$$

и

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^- = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_f^- = \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega^-.$$



**2.2. Упругий скелет.** Совместное движение вязкой жидкости в поровом пространстве и упругого скелета на микроскопическом уровне описывается системой (10) – (13), которая состоит из стационарного уравнения Стокса

$$\nabla \cdot \left( \alpha_\mu \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} \right) \right) - \nabla p_f - \rho_f \mathbf{e}_2 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_f = 0, \quad (22)$$

для перемещения  $\mathbf{w}_f$  и давления  $p_f$  в неоднородной жидкости, стационарного уравнения Ламэ

$$\nabla \cdot (\alpha_\lambda \mathbb{D}(\mathbf{w}_s)) - \nabla p_s - \rho_s \mathbf{e}_2 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0, \quad (23)$$

для перемещения  $\mathbf{w}_s$  и давления  $p_s$  в упругом скелете, и двух граничных условий на общей границе «твердый скелет – поровое пространство»  $S^\varepsilon$ :

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_s, \quad (24)$$

$$\left( \alpha_\mu \mathbb{D} \left( \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} \right) - p_f \mathbb{I} \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \alpha_\lambda \mathbb{D}(\mathbf{w}_s) - p_s \mathbb{I} \right) \cdot \mathbf{n}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор нормали к границе  $S^\varepsilon$ .

Система (14) – (17) дополняется начальным и граничным условиями

$$\mathbf{w}_f(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\varepsilon, \quad (26)$$

$$\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_f(x, t), \quad \text{если } x \in \Omega_f, \quad t > 0,$$

и

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_s(x, t), \quad \text{если } x \in \Omega_s, \quad t > 0,$$

и условием нормализации

$$\int_{\Omega^\varepsilon} p(\mathbf{x}, t) dx = 0, \quad (28)$$

где

$$p(\mathbf{x}, t) = p_f(\mathbf{x}, t), \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad t > 0,$$

и

$$p(\mathbf{x}, t) = p_s(\mathbf{x}, t), \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_s, \quad t > 0,$$

Таким образом имеем задачу Коши для уравнения переноса (10). На микроскопическом уровне уравнение переноса для плотности жидкости определяется только в поровом пространстве  $\Omega_f^\varepsilon$ . Для существующей микроскопической модели (см. [9]) характеристическая функция  $\tilde{\chi}^\varepsilon$  порового пространства есть неизвестная функция и определяется как решение задачи Коши

$$\frac{\partial \tilde{\chi}^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \nabla \tilde{\chi}^\varepsilon = 0, \quad \tilde{\chi}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}).$$



Это означает, что поверхность между твердым скелетом и жидкостью  $S^\varepsilon$  в этой модели есть материальная поверхность и нам не нужно граничное условие для плотности жидкости на  $S^\varepsilon$ . Но наша основная динамическая система здесь линейная, где  $\tilde{\chi}^\varepsilon = \chi^\varepsilon$  известная функция. Таким образом поверхность  $S^\varepsilon$  не больше материальной поверхности и нам необходимо граничное условие для плотности жидкости на части  $S^\varepsilon$ , где жидкость «проникает» в поровое пространство. Чтобы избежать этого, распространим задачу Коши (10) на всю область  $\Omega$ . Во первых, предположим, что функция  $\rho_f^0(\mathbf{x})$  определена во всей области  $\Omega$  и

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+ \text{ в } \Omega^+, \quad \rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^- \text{ в } \Omega^-.$$

Перепишем задачу Коши для плотности жидкости как задачу Коши для плотности смешивания

$$\rho = \chi^\varepsilon \rho_f + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s$$

в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T; \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (29)$$

где

$$\rho^{(0)}(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon \rho_f^0(\mathbf{x}) + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s.$$

### 3. Вычислительный алгоритм

**3.1. Абсолютно твердый скелет.** В качестве численного метода решения системы уравнений (9) – (10), дополненной условиями (11) – (13), был выбран метод крупных частиц [17]. Этот метод основан на расщеплении исходных дифференциальных уравнений по физическим процессам. Метод крупных частиц – это усовершенствованный метод «частицы в ячейке» разработанный Харлоу. Этот метод используется для решения определенного класса уравнений в частных производных, в том числе неустойчивости Рэлея-Тейлора для задачи Маскета со свободной границей.

Процесс решения системы (9) – (10) очень трудный из-за наличия стратификации. Неоднородность жидкости требует дополнительного расчета поля плотностей. Чтобы найти неизвестные функции, процесс вычисления можно представить в виде трехэтапной схемы.

Этап 1. Вычисляется промежуточное значение скорости  $\tilde{\mathbf{v}}$  из уравнений

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(\tilde{\mathbf{v}})) - \rho \mathbf{e} = 0, \quad (30)$$

и промежуточное значение плотности  $\tilde{\rho}$  из уравнения

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \rho = 0, \quad (31)$$

Этап 2. Основная трудность при численном решении уравнений (2.1), (2.2) связана с вычислением поля давления. Успех в преодолении этих трудностей был достигнут благодаря идее искусственной сжимаемости [18]. Этот метод очень важен для вычисления неизвестного давления  $p$  из уравнения



$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (32)$$

Здесь необходимо соблюдать условие соленоидальности ( $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$ ), что достижимо при увеличении  $c_p$  каждый шаг по времени, пока равенство не будет выполняться с заданной точностью.

Этап 3. Вычисляется итоговое значение скорости  $\mathbf{v}$  из уравнения

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v})) - \nabla p - \tilde{\rho} \mathbf{e} = 0 \quad (33)$$

и давления  $\rho$  из уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \tilde{\rho} = 0, \quad (34)$$

Наконец, выпишем основные разностные схемы. Область интегрирования покрывается стационарной (Эйлеровой) разностной сеткой произвольной формы (прямоугольная сетка в нашем случае, см. рис.6):

$$\Omega_f = \left( \begin{array}{l} x_1^{(i+1/2)} = ih_1, \quad h_1 > 0; \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \\ x_2^{(j+1/2)} = jh_2, \quad h_2 > 0; \quad j = 0, 1, \dots, N_2; \end{array} \right)$$

где  $h_1, h_2$  – размер сетки,  $N_1, N_2$  – количество ячеек сетки, соответственно, в направлении  $x_1$  и  $x_2$  (точка с координатами  $(i, j)$  совпадает с центром ячейки). Здесь, как и в исходном методе расщепления, будем использовать «шахматную» сетку. Это дает возможность четко интерпретировать каждую ячейку, как элемент объема, который характеризуется рассчитываемыми давлением и плотностью в его центре.

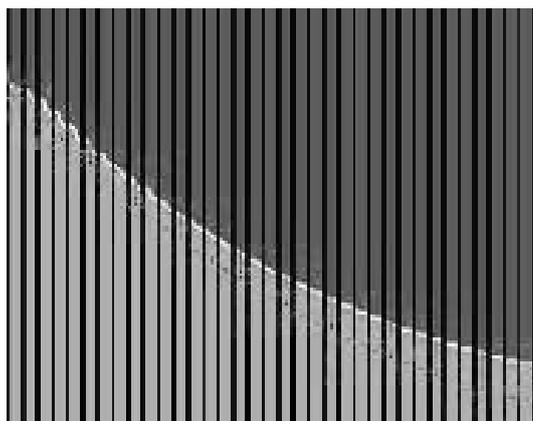


Рис. 6. Шаблон расчетной сетки.

Изменяются только величины, относящиеся к ячейке в целом. По этой причине пренебрегаем конвективными членами, относящимися к поступательным эффектам. В остальных уравнениях  $\rho$  выносится за знак дифференцирования, и уравнения (2.1)–(2.2) решаются для  $u, v$  по времени.



Простейшая конечно-разностная аппроксимация уравнения (3.1) будет иметь вид

$$\alpha_\mu \frac{\tilde{u}_{i+3/2,j}^n - 2\tilde{u}_{i+1/2,j}^n + \tilde{u}_{i-1/2,j}^n}{h_1^2} = -\alpha_\mu \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j+1}^n - 2\tilde{u}_{i+1/2,j}^n + \tilde{u}_{i+1/2,j-1}^n}{h_2^2},$$

$$\alpha_\mu \frac{\tilde{v}_{i+1,j+1/2}^n - 2\tilde{v}_{i,j+1/2}^n + \tilde{v}_{i-1,j+1/2}^n}{h_1^2} = -\alpha_\mu \frac{\tilde{v}_{i,j+3/2}^n - 2\tilde{v}_{i,j+1/2}^n + \tilde{v}_{i,j-1/2}^n}{h_2^2} - \rho_{i,j+1/2} e_2,$$

где  $n$  – шаг по времени,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  – промежуточные значения скорости течения. Величины с дробными индексами относятся к границам ячеек, например:

$$\tilde{v}_{i+1/2,j} = \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i+1,j}}{2},$$

В методе крупных частиц необходимо вычислить плотность потока (3.2) через границы ячеек. Это говорит о том, что плотность большой частицы находится в движении только за счет нормального компонента скорости к границе. Эти значения параметров течения на следующем временном слое вычисляются в соответствии с уравнениями (направление потока слева направо и снизу вверх):

$$\alpha_\mu \frac{\tilde{\rho}_{i,j}^{n+1} - \tilde{\rho}_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{(\rho\tilde{u})_{i+1/2,j}^{n+1} - (\rho\tilde{u})_{i-1/2,j}^{n+1}}{h_1} - \frac{(\rho\tilde{v})_{i,j+1/2}^{n+1} - (\rho\tilde{v})_{i,j-1/2}^{n+1}}{h_2}. \quad (35)$$

В случаях, когда необходимо определить значения функции в точках сетки (см. рис. 6), достаточно воспользоваться средним арифметическим, например:

$$\rho_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}).$$

На завершающем шаге (при использовании дискретной модели среды) проводится дополнительный расчет плотности, что сглаживает колебания и повышает точность вычислений. Комбинируя различные этапы, получаем ряд разностных схем, которые и составляют метод крупных частиц. Выбранный метод может быть интерпретирован с различных точек зрения: метод расщепления, смешанный метод Эйлера-Лагранжа, вычисление в локальных лагранжевых координатах с масштабированием на предыдущей сетке, различные обозначения закона сохранения для жидкого элемента (большой частицы), эйлера разностная схема.

При замене дифференциальной задачи на конечно-разностное представление необходимо обратить внимание на приближение граничных условий, так как их конкретное приближение прямо влияет на корректность метода и устойчивость схемы, а также скорость сходимости. Сформулируем граничные условия, введя серию фиктивных ячеек (так, чтобы каждая вычисляемая точка становилась внутренней и описанный алгоритм сохранялся для всех ячеек). Для первого порядка аппроксимации достаточно одного слоя, для второго порядка аппроксимации – два слоя. Так в случае, когда боковые стенки есть твердая поверхность, то условие непротекания представляется в виде

$$u_{-1/2,j} = 0, \quad (36)$$



а условие прилипания в виде

$$v_{i-1/2, j+1/2} = 0. \quad (37)$$

В случае задачи на плоскости, геометрические характеристики дробных ячеек могут быть определены непосредственными измерениями. В случае аксиально-симметричной задачи необходимо провести дополнительные вычисления для нахождения расстояния от каждой дробной ячейки до оси симметрии. Разностные уравнения для дробных ячеек получаются путем небольшой модификации разностного уравнения для целой ячейки.

**3.2. Упругий скелет.** Компьютерное моделирование совместного движения вязкой жидкости в поровом пространстве и упругого скелета (на микроскопическом уровне) есть численное решение системы, которая состоит из стационарной системы уравнений Стокса (14) для перемещения  $\mathbf{w}_f$  и давления  $p_f$  неоднородной жидкости и стационарного уравнения Ламэ (15) для перемещения  $\mathbf{w}_s$  и давления  $p_s$  упругого скелета с соответствующими условиями на общей границе.

В качестве численного метода для моделирования неустойчивости Рэлея-Тейлора с учетом упругой составляющей скелета был выбран аналогичный метод, описанный выше (метод крупных частиц). Рассматриваемая область заменяется системой жидких частиц, которые совпадают с ячейкой эйлеровой сетки (см. рис. 6). Предлагаемый алгоритм состоит из четырех главных этапов:

**Этап 1.** Решается система уравнений Ламэ (15) с заданными граничными и начальными условиями для перемещения  $\mathbf{w}_s$  и  $p_s$ :

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{w}_f, \mathbf{x} \in S^e, \quad \mathbf{w}_s = 0, \mathbf{x} \in S. \quad (38)$$

Решение этой системы ничем не отличается от решения системы Стокса (п. 3.1), то есть вводится искусственная сжимаемость и вычисляется неизвестное  $p_s$  из уравнения

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + c_{p,s} \nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0. \quad (39)$$

Ввиду того, что жидкость несжимаема, необходимо также увеличивать  $c_{p,s}$  в каждый момент времени до тех пор, пока не будет выполнено условие соленоидальности ( $\nabla \cdot \mathbf{w}_s = 0$ ).

Следует отметить, что процедура составления двумерной разностной схемы уравнения Ламэ идентична, описанной ранее для уравнения Стокса. Простейшая конечно-разностная аппроксимация уравнения (2.7) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda \frac{w_{1i+3/2,j}^n - 2w_{1i+1/2,j}^n + w_{1i-1/2,j}^n}{h_1^2} &= -\alpha_\lambda \frac{w_{1i+1/2,j+1}^n - 2w_{1i+1/2,j}^n + w_{1i+1/2,j-1}^n}{h_2^2}, \\ \alpha_\lambda \frac{w_{2i+1,j+1/2}^n - 2w_{2i,j+1/2}^n + w_{2i-1,j+1/2}^n}{h_1^2} &= \\ &= -\alpha_\lambda \frac{w_{2i,j+3/2}^n - 2w_{2i,j+1/2}^n + w_{2i,j-1/2}^n}{h_2^2} - \rho_s e_{i,j+1/2} e_2, \end{aligned}$$

где  $n$  – шаг по времени,  $w_1, w_2$  значения перемещения,  $\rho_s$  плотность скелета.



Этап 2. Используя найденные значения  $\mathbf{w}_s$  и  $p_s$ , находим нормальное напряжение на границе  $S^e$

$$(\alpha_\lambda \mathbb{D}(\mathbf{w}_s) - p_s \mathbb{I}) \mathbf{n} = \mathbf{A}, \quad (40)$$

где  $\mathbf{n}$  единичный вектор нормали к границе  $S^e$ .

Этап 3. Далее решается система уравнений (14) в  $\Omega_f^e$ , как и для случая абсолютно твердого скелета, повторяя этапы 1 - 3 из предыдущего пункта (3.1), с условием на общей границе  $S^e$

$$\left( \alpha_\mu \mathbb{D} \left( \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} \right) - p_f \mathbb{I} \right) \mathbf{n} = (\alpha_\lambda \mathbb{D}(\mathbf{w}_s) - p_s \mathbb{I}) \mathbf{n}, \quad (41)$$

в котором, на основе результатов расчета на предыдущем этапе, нам известна правая часть равенства.

Это граничное условие предполагает, что вектор смещения и давления удовлетворяет непрерывности нормальных напряжений на общей границе между жидкостью и упругим скелетом.

Найденное значение скорости жидкости подставляем в уравнение переноса (29) в  $\Omega_f^e$ , что позволяет вычислить значение плотности  $\rho_f$  на следующем шаге.

Этап 4. Зная скорость  $\partial \mathbf{w}_f / \partial t$  в жидкой части, находим  $\mathbf{w}_s$  на следующем шаге по времени из условия непрерывности нормальных напряжений (16).

Таким образом, учитывая поведение жидкостей на границе «жидкость-упругий скелет» и, решая систему уравнений (14), (15), (29) с соответствующими начальными и граничными условиями (16) – (28), получаем численную аппроксимацию совместного движения жидкости и упругого скелета.

#### 4. Заключение

В настоящей работе показано, как необходимо производить численное моделирование процессов совместного движения несмешивающихся жидкостей. Мы начали с задачи движения двух жидкостей со свободной границей в рамках микроскопической модели. Теоретически, эта математическая модель наиболее подходящая для описания рассматриваемого физического процесса. Однако, она не имеет никакого практического значения, так как приходится решать задачу в физической области в несколько сотен метров, в то время, как коэффициенты колеблются от физического размера в несколько микрон. Практическая значимость модели появляется только после усреднения. В свою очередь, усреднение имеет по крайней мере два уровня аппроксимации, которые зависят от безразмерного критерия физической задачи. Первый уровень приближения – хорошо известная задача Маскета. Второй уровень приближения – задача со свободной границей на микроскопическом уровне (задача Маскета для вязкоупругой фильтрации). На основе численных расчетов для периодической структуры было смоделировано усреднение за счет увеличения числа элементарных ячеек в единице



объема. Результаты показывают, что решение проблемы Маскета неустойчиво, свободная граница резко меняет структуру и превращается в некоторую области (переходную фазу), занятую смесью из двух жидкостей. Между тем, в случае вязкоупругой фильтрации решение Маскета остается классическим, то есть обладает гладкой свободной границей. Поэтому задача Маскета для вязкоупругой фильтрации является естественным обобщением классической задачи Маскета, которая все еще остается нерешенной, как математическая задача, и очень трудно реализуема численно.

### Литература

1. Rayleigh, Lord (John William Strutt). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1883. – 14. – P.170–177.
2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proceedings of the Royal Society of London. – Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1950. – 201(1065). – P.192–196.
3. Muskat M. Two-fluid system in porous media. The encroachment of water into an oil sand // Physics. – 1934. – 5. – P.250-264.
4. Fahuai Yu. Global classical solution of Muskat free boundary problem // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – 288. – P.442–461.
5. Radkevich E. On the spectrum of the pencil in the Verigin-Muskat problem // Sbornik: Mathematics. – 1995. – 80;1. – P.33-74.
6. Siegel M., Caffish R.E., Howison S. Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem // Comm. on Pure and Appl. Math. – 2004. – LVII;1. – P.38.
7. Burrige R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America. – 1981. – 70;4. – P.1140-1146.
8. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory // Lecture Notes in Physics: Springer-Verlag, 1980. – №129.
9. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – P.519-538.
10. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tonen aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungsercheinungen // Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. – 1923. – 132;IIa. – P.104-124.
11. Biot M. General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – 12. – P.155-164.
12. Meirmanov A. The Muskat problem for a viscoelastic filtration // Accepted for publication to Interfaces and Free Boundaries.
13. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.
14. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B. A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solution // Interfaces and Free Boundaries 2000. – 2. – P.413-424.



15. Daly B.J. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. – 1967. – 2. – P.297-307.
16. Meirmanov A. The Stefan problem / 1992. – Walter de Gruyter, Berlin-New York. – 244 p.
17. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / М.: Наука, 1984. – С.510-520.
18. Владимирова Н.Н., Кузнецова Б.Г., Яненко Н. Н. (1996) Численные расчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск, 1996. – С.186-192.

## THE RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY FOR THE MUSKET FREE BOUNDARY PROBLEM

O.V. Galtsev

Belgorod State University,  
Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [oleggaltsev@yandex.ru](mailto:oleggaltsev@yandex.ru)

**Abstract.** Joint motion of two immiscible incompressible liquids in porous media is studied. Liquids have different densities and initially separated by a surface of strong discontinuity (free boundary). Results of numerical simulations for exact free boundary problems on the microscopic level for the absolutely rigid solid skeleton and for the elastic solid skeleton of different geometries are discussed. Problems under consideration have the natural small parameter which is the ratio of average pore size to the size of the physical domain. If the parameter  $\varepsilon$  formally tends to zero, solutions of microscopic equations describes the averaged motion of liquids both in the case of the Muskat problem with the absolutely rigid solid skeleton and in the case of the viscoelastic Muskat problem with the elastic solid skeleton. The last model preserves a free boundary during the motion while in the first model, instead of the free boundary, the mushy region appears occupied by a mixture of two fluids.

**Key words:** Musket's problem, the Rayleigh-Taylor instability, Stokes and Lamé's equations.



УДК 517.958

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ СИУ 2D ЗАДАЧ  
ДИФРАКЦИИ НА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ  
ОТРАЖАЮЩИХ СТРУКТУРАХ.**

**Часть II. Случай Н-поляризации**

**Ю.В. Гандель, В.Д. Душкин**

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина, e-mail: [Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua](mailto:Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua)  
Академия ВВ МВС Украины,  
пл. Восстания 3, Харьков, 61005, Украина, e-mail: [Dushkin\\_V\\_and\\_V@mail.ru](mailto:Dushkin_V_and_V@mail.ru)

**Аннотация.** Задачи дифракции электромагнитных волн на многослойных отражающих структурах в 2D случае приводят к краевым задачам для уравнений Гельмгольца. В случае Н-поляризации эти краевые задачи сведены к системам граничных сингулярных интегральных уравнений первого рода с логарифмическими дополнительными условиями и системам граничных сингулярных интегральных уравнений с интегральными дополнительными условиями, для решения которых применяется вариант эффективного и строго обоснованного численного метода дискретных особенностей.

**Ключевые слова:** задачи дифракции, многослойные отражающие структуры, краевые задачи, сингулярные интегральные уравнения.

Также как и в случае Е-поляризации [1], сведение исходных краевых задач к системам сингулярных интегральных уравнений (СИУ) основывается на методе параметрических представлений сингулярных интегралов [2]-[4].

Как уже было отмечено в первой части статьи, подбор соотношений размеров элементов многослойных решёток, позволяют получать электромагнитные поля с необходимыми физическими характеристиками. Поэтому актуальной задачей для исследователей является создание численно-аналитических моделей, позволяющих провести численный эксперимент в широком диапазоне частот и геометрических параметров структуры.

Как и в случае Е-поляризации, характерной особенностью систем СИУ задач дифракции Н-поляризованных волн является наличие нескольких неизвестных функций, каждая из которых связана с характеристикой поля на одном из слоёв. Каждое из СИУ зависит от двух неизвестных функций, и фактически представляет уравнение связи полей на двух соседних слоях.

Рассмотрим следующую дифракционную структуру (см. рис. 1). В плоскости  $z' = D$  лежит бесконечный экран, на котором расположены два слоя диэлектриков. Первый слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ , заполняет область  $d'_- < z' < d'_+$ , второй слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ , заполняет область  $D < z' < d'_-$ .

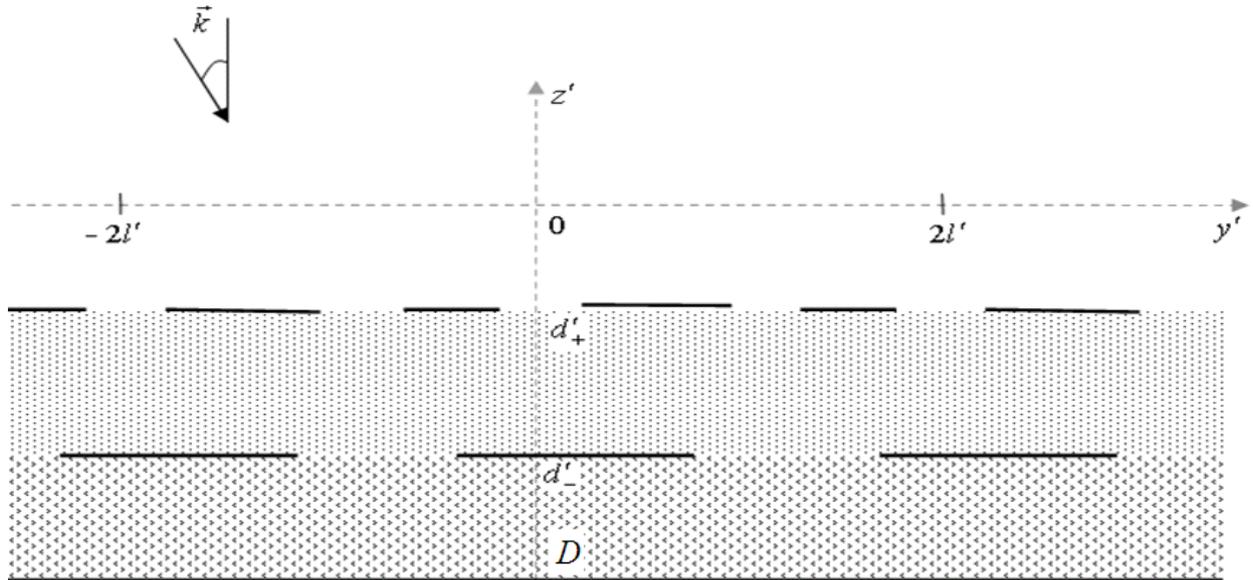


Рис. 1. Сечение электродинамической структуры плоскостью  $Y'OZ'$ .

Над описанной структурой, в области  $z' > d'_+$  – полупространство с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0 = 1$ . Между верхним и нижним слоями диэлектрика и на верхнем слое диэлектрика расположены  $2l'$ -периодические системы, состоящие из бесконечно тонких идеально проводящих лент.

Пусть

$$L^+ = \left\{ y' \in \mathbb{R} \mid y' \in \bigcup_{q=1}^{M^+} (a_q^+, b_q^+), 0 < a_1^+ < b_1^+ < \dots < a_q^+ < b_q^+ \dots < a_{M^+}^+ < b_{M^+}^+ < 2l' \right\} \quad (1)$$

координаты  $y'$  точек плоскости  $z = d'_+$ , лежащих на отрезке  $y' \in [0, 2l']$  и свободных от лент.

Пусть также

$$L^- = \left\{ y' \in \mathbb{R} \mid y' \in \bigcup_{p=1}^{M^-} (a_p^-, b_p^-), 0 < a_1^- < b_1^- < \dots < a_p^- < b_p^- \dots < a_{M^-}^- < b_{M^-}^- < 2l' \right\} \quad (2)$$

координаты  $y'$  точек плоскости  $z = d'_-$ , лежащих на отрезке  $y' \in [0, 2l']$  и свободных которых от лент.

Вообще говоря,  $a_q^+ \neq a_s^-$  и  $b_q^+ \neq b_s^-$ , если  $q = s$ .



Введём обозначения для областей:

$$\Omega_0 = \{(y', z') \in R^2 \mid z' > d'_+, 0 < y' < 2l'\}, \quad (3)$$

$$\Omega_1 = \{(y', z') \in R^2 \mid d'_- < z' < d'_+, 0 < y' < 2l'\}, \quad (4)$$

$$\Omega_2 = \{(y', z') \in R^2 \mid D' < z' < d'_-, 0 < y' < 2l'\}. \quad (5)$$

Рассматривается стационарная задача - зависимость поля от времени задаётся множителем  $e^{-i\omega t}$ .

Пусть из бесконечности сверху на дифракционную структуру наклонно падает Е-поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды:

$$U(y', z') = E_x(y', z') = \exp(ik(y' \cdot \sin \varphi - (z' - d'_+) \cdot \cos \varphi)). \quad (6)$$

Необходимо найти полное поле  $u(y', z')$ , возникшее в результате рассеяния волны рассматриваемой дифракционной структуре. Оно удовлетворяет в областях  $\Omega_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ) уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 \sqrt{\varepsilon_i} \cdot u = 0, \quad (y', z') \in \Omega_i, \quad (i = 0, 1, 2), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (7)$$

условию Майкснера на ребре; разность полного и падающего полей удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \cdot \left( \frac{\partial(u - U)}{\partial r} - ik \cdot (u - U) \right) = 0, \quad r = \sqrt{(y')^2 + (z')^2}. \quad (8)$$

Введём в рассмотрение функцию  $u_0(y', z')$  — решение в области  $\Omega_0$  вспомогательной краевой задачи дифракции плоской монохроматической волны  $U(y', z')$ , определённой формулой (6), на бесконечном плоском идеально проводящем экране, лежащем в плоскости  $z' = d'_+$ . Функция  $u_0(y', z')$  на поверхности экрана удовлетворяет граничному условию:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z'}(y', d'_+) = 0, \quad y' \in R'. \quad (9)$$

Поле  $u_0(y', z')$  имеет представление:

$$u_0(y', z') = \exp(ik(y' \cdot \sin \varphi - (z' - d'_+) \cdot \cos \varphi)) - \exp(ik(y' \cdot \sin \varphi + (z' - d'_+) \cdot \cos \varphi)), \quad (10)$$

причём

$$u_0(y', d'_+) = 2 \cdot \exp(iky' \cdot \sin \varphi). \quad (11)$$

Полное поле  $u(y', z')$ , возникшее в результате дифракции волны на решётках  $u(y', z')$ , будем искать в виде:

$$u(y', z') = \begin{cases} u_0(y', z') + u^+(y', z'), & (y', z') \in \Omega_0; \\ u_1(y', z'), & (y', z') \in \Omega_1; \\ u_2(y', z'), & (y', z') \in \Omega_2. \end{cases} \quad (12)$$



Поле  $u^+(y', z')$  в области  $\Omega_0$  ищем в виде:

$$u^+(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^+}{\gamma_{0,n}} \cdot e^{-\gamma'_{0,n}(z'-d'_+)} \cdot e^{i \cdot p'_n y'} , \quad (13)$$

где

$$p'_n = k \cdot \sin \varphi + \frac{\pi n}{l'} , \quad \gamma'_{0,n} = \sqrt{(p'_n)^2 - k^2} , \quad \gamma_{0,n} = \frac{l'}{\pi} \gamma'_{0,n} \quad n \in Z . \quad (14)$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если ветвь радикала выбрать так, чтобы  $\text{Re}(\gamma'_{0,n}) \geq 0$ ,  $\text{Im}(\gamma'_{0,n}) \leq 0$ ,  $n \in Z$ .

Пусть  $\vartheta_i$   $i = 1, 2$  — угол между волновым вектором в области  $\Omega_i$ , заполненной диэлектриком и вектором противоположным оси  $OZ$ . В силу закона Снеллиуса справедливы равенства:

$$k \cdot \sin \varphi = k \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin \vartheta_1 = k \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sin \vartheta_2 . \quad (15)$$

Учитывая соотношение (15) поле  $u_1(y', z')$  в области  $\Omega_1$  ищем в виде:

$$u_1(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{1,n}} \left( b_n^+ \cdot \frac{\text{ch}(\gamma'_{1,n}(z' - d'_-))}{\text{sh}(\gamma'_{1,n}(d'_+ - d'_-))} + b_n^- \cdot \frac{\text{ch}(\gamma'_{1,n}(z' - d'_+))}{\text{sh}(\gamma'_{1,n}(d'_+ - d'_-))} \right) \cdot e^{i \cdot p'_n y'} , \quad (16)$$

где

$$\gamma'_{1,n} = \sqrt{(p'_n)^2 - k^2 \cdot \varepsilon_1} , \quad \gamma_{1,n} = \frac{l'}{\pi} \gamma'_{1,n} , \quad n \in Z . \quad (17)$$

Поле  $u_2(y', z')$  в области  $\Omega_2$  ищем в виде:

$$u_2(y', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^-}{\gamma_{2,n}} \cdot \frac{\text{ch}(\gamma'_{2,n}(z' - D'))}{\text{sh}(\gamma'_{2,n}(d'_- - D'))} \cdot e^{i \cdot p'_n y'} , \quad (18)$$

где

$$\gamma'_{2,n} = \sqrt{(p'_n)^2 - k^2 \cdot \varepsilon_2} , \quad \gamma_{2,n} = \frac{l'}{\pi} \gamma'_{2,n} , \quad n \in Z . \quad (19)$$

Введём безразмерные координаты и параметры:

$$\partial \ell = \frac{l'k}{\pi} = \frac{2l'}{\lambda} , \quad y = \frac{\pi}{l'} y' , \quad z = \frac{\pi}{l'} z' , \quad d'_\pm = \frac{\pi}{l'} d'_\pm ; \quad (20)$$

$$\alpha_q^+ = \frac{\pi}{l'} a_q^+ , \quad \beta_q^+ = \frac{\pi}{l'} b_q^+ , \quad q = 1, \dots, M^+ ; \quad (21)$$

$$\alpha_s^- = \frac{\pi}{l'} a_s^- , \quad \beta_s^- = \frac{\pi}{l'} b_s^- , \quad s = 1, \dots, M^- ; \quad (22)$$

$$p_n = \frac{l' \cdot p'_n}{\pi} = \partial \ell \cdot \sin \varphi + n , \quad n \in Z ; \quad (23)$$

$$L^+ = \left\{ y \in \bigcup_{q=1}^{M^+} (\alpha_q^+, \beta_q^+) \mid 0 < \alpha_1^+ < \beta_1^+ < \dots < \alpha_q^+ < \beta_q^+ < \dots < \alpha_{M^+}^+ < \beta_{M^+}^+ < 2\pi \right\} , \quad (24)$$



$$L^- = \left\{ y \in \bigcup_{q=1}^{M^-} (\alpha_q^-, \beta_q^-) \mid 0 < \alpha_1^- < \beta_1^- < \dots < \alpha_s^- < \beta_s^- < \dots < \alpha_{M^-}^- < \beta_{M^-}^- < 2\pi \right\}. \quad (25)$$

Из граничного условия обращения полного поля на поверхности идеально проводящей структуры в ноль следуют равенства:

$$\frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = \frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+) = 0, \quad y \in CL^+ = [0, 2\pi] \setminus L^+; \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(y, d_-) = 0, \quad y \in CL^- = [0, 2\pi] \setminus L^-. \quad (27)$$

Из условий связи полей на границе раздела двух сред в «щелях» между ленточными структурами получаем равенства:

$$u_0(y, d_+) + u^+(y, d_+) = u_1(y, d_+), \quad y \in L^+; \quad (28)$$

$$u_1(y, d_-) = u_2(y, d_-), \quad y \in L^-; \quad (29)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+), \quad y \in L^+; \quad (30)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-) = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u_2}{\partial z}(y, d_-), \quad y \in L^-. \quad (31)$$

Из представлений полей (13), (16), (18), граничных условий (26), (27), и условий связи полей на границе раздела двух сред (28) – (31) для коэффициентов  $a_n^+$ ,  $a_n^-$ ,  $b_n^+$ ,  $b_n^-$  получаем следующие соотношения:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL^+; \quad (32)$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^+ \exp(ip_n y), \quad y \in L^+; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot e^{i\theta \ell \sin \varphi \cdot y} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^+}{W_{0,n}} \exp(ip_n y) = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{b_n^+}{W_{1,n}} + \frac{b_n^-}{\text{sh}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} \right) \cdot \exp(ip_n y), \quad y \in L^+; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL^-; \quad (35)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^- \exp(ip_n y), \quad y \in L^-; \quad (36)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^-}{W_{2,n}} \cdot \exp(ip_n y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{b_n^-}{W_{1,n}} + \frac{b_n^+}{\operatorname{sh}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} \right) \cdot \exp(ip_n y), \quad y \in L^-; \quad (37)$$

где

$$\frac{1}{W_{0,n}} = \frac{1}{\gamma_{0,n}}, \quad \frac{1}{W_{1,n}} = \frac{\operatorname{cth}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))}{\gamma_{1,n}}, \quad \frac{1}{W_{2,n}} = \frac{\operatorname{th}(\gamma_{2,n}(d_- - D))}{\gamma_{2,n}}, \quad n \in Z. \quad (38)$$

Из представлений (17), (19), (38) следуют асимптотические равенства:

$$\frac{1}{W_{i,n}} = \frac{1}{|n|} \left( 1 - \partial \ell \sin \varphi \cdot \frac{1}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2. \quad (39)$$

Учитывая (39), введём величины:

$$\Delta_{i,n} = \frac{1}{W_{i,n}} - \frac{1}{|n|} \left( 1 - \partial \ell \sin \varphi \cdot \frac{1}{n} \right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2. \quad (40)$$

Действуя также как и в [5], введём в рассмотрение функции:

$$F^+(y) = \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y), \quad y \in [0, 2\pi]; \quad (41)$$

$$F^-(y) = \frac{\partial u^-}{\partial z}(y, d_-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y), \quad y \in [0, 2\pi]. \quad (42)$$

В силу граничных условий (26), (27) функции  $F^+(t)$  и  $F^-(t)$  обладают свойствами:

$$F^+(y) = 0, \quad y \in CL^+, \quad F^-(y) = 0, \quad y \in CL^-. \quad (43)$$

Из (32)–(33), (35) – (36) следует, что  $a_n^+ = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} b_n^+$ ,  $a_n^- = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} b_n^-$ ,  $n \in Z$  и, следовательно, справедливы интегральные представления:

$$a_n^+ = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} b_n^+ = -\frac{1}{2\pi} \int_{L^+} F^+(t) \exp(-ip_n t) dt, \quad n \in Z; \quad (44)$$

$$a_n^- = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} b_n^- = \frac{1}{2\pi} \int_{L^-} F^-(t) \exp(-ip_n t) dt, \quad n \in Z. \quad (45)$$

Производя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в работах [6] - [10], получаем:

$$u^+(y, d_+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^+}{W_{0,n}} \exp(ip_n y) =$$



$$\begin{aligned}
&= - \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right) F^+(t) dt + \right. \\
&+ \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \int_0^{y-t} \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds F^+(t) dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \frac{\exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t))}{2W_{0,0}} F^+(t) dt + \\
&\left. + \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_{0,n}}{2} \exp(in(y-t)) F^+(t) dt \right], \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(y, d_-) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^-}{W_{2,n}} \exp(ip_n y) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right) F^-(t) dt + \\
&+ \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \int_0^{y-t} \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds F^-(t) dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \frac{\exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t))}{2W_{2,0}} F^-(t) dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_{2,n}}{2} \exp(in(y-t)) F^-(t) dt. \quad (47)
\end{aligned}$$

Действуя аналогично, для функции  $u_1(y, d_+)$  находим следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned}
u_1(y, d_+) &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right) F^+(t) dt + \right. \\
&+ \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t)) \int_0^{y-t} \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds F^+(t) dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \frac{\exp(i\partial\ell \sin \varphi(y-t))}{2W_{1,0}} F^+(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_{1,n}}{2} \exp(ip_n(y-t)) F^+(t) dt \left. \right] - \\
&- \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip_n(y-t))}{2 \operatorname{sh}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} F^-(t) dt. \quad (48)
\end{aligned}$$

Из соотношений (45), (47) получаем следующее интегральное представление:



$$\begin{aligned}
 u_1(y, d_-) = & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right) F^-(t) dt + \right. \\
 & + \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \int_0^{y-t} \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds F^-(t) dt + \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \frac{\exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t))}{2W_{1,0}} F^-(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_{1,n}}{2} \exp(ip_n (y-t)) F^-(t) dt \right] - \\
 & - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip_n (y-t))}{2 \operatorname{sh}(\gamma_{1,n} (d_+ - d_-))} F^+(t) dt. \tag{49}
 \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}
 Q_0(y, t) = & -\frac{\exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t))}{2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \left( \frac{\varepsilon_0}{W_{0,0}} + \frac{\varepsilon_1}{W_{1,0}} \right) - \\
 & - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_{0,n} \cdot \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \Delta_{1,n}}{2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \exp(ip_n (y-t)), \tag{50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(y, t) = & -\frac{\exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t))}{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \left( \frac{\varepsilon_2}{W_{2,0}} + \frac{\varepsilon_1}{W_{1,0}} \right) - \\
 & - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta_{2,n} \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \Delta_{1,n}}{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \exp(ip_n (y-t)), \tag{51}
 \end{aligned}$$

$$Q_1(y, t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip_n (y-t))}{\operatorname{sh}(\gamma_{1,n} (d_+ - d_-))},$$

$$Q_3(y, t) = \frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip_n (y-t))}{\operatorname{sh}(\gamma_{1,n} (d_+ - d_-))}. \tag{52}$$

В результате подстановки в соотношения (34), (37) интегральных представлений (46) — (49) получаем систему интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью:



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right| F^+(t) dt - \\ & - \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \int_{L^+} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \left( \int_0^{y-t} \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds \right) F^+(t) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{L^+} Q_0(y, t) F^+(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L^-} Q_1(y, t) F^-(t) dt = -\frac{2 \cdot \varepsilon_0}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \cdot e^{i\partial\ell \sin \varphi \cdot y}, \quad y \in L^+; \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right| F^-(t) dt - \\ & - \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \int_{L^-} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \left( \int_0^{y-t} \ln \left( 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds \right) F^-(t) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{L^-} Q_2(y, t) F^-(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L^+} Q_3(y, t) F^+(t) dt = 0, \quad y \in L^-. \end{aligned} \quad (54)$$

Для удобства записи последующих преобразований введём обозначения:

$$\begin{aligned} K_{1,i}(y, t) &= e^{i\partial\ell \sin \varphi (y-t)} \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right| - \\ & - \frac{i\partial\ell \sin \varphi}{\pi} \exp(i\partial\ell \sin \varphi (y-t)) \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds + Q_i(y, t), \quad i = 0, 2; \end{aligned} \quad (55)$$

$$K_{1,i}(y, t) = Q_i(y, t), \quad i = 1, 3; \quad (56)$$

$$\begin{aligned} K_{2,i}(y, t) &= -\frac{\partial K_{1,i}(y, t)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} Q_i(y, t) + \frac{e^{i\partial\ell \sin \varphi (y-t)}}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{t-y}{2} \right) - \\ & - (\partial\ell \sin \varphi)^2 e^{i\partial\ell \sin \varphi (y-t)} \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds, \quad i = 0, 2; \end{aligned} \quad (57)$$

$$K_{2,i}(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} Q_i(y, t), \quad i = 1, 3. \quad (58)$$

В силу условий Майкснера на ребре:

$$F^+(y) = O\left(r_1^{-1/2}\right), \quad r_1 \rightarrow 0, \quad (59)$$

$$F^-(y) = O\left(r_2^{-1/2}\right), \quad r_2 \rightarrow 0, \quad (60)$$

где

$$r_1 = \min_{q=1, \dots, M^+} (|y - \alpha_q^+|, |y - \beta_q^+|), \quad (61)$$

$$r_2 = \min_{s=1, \dots, M^-} (|y - \alpha_s^-|, |y - \beta_s^-|). \quad (62)$$



Условия Майкснера будут выполнены, если мы будем искать сужение функции  $F^+(y)$  на интервалы  $(\alpha_q^+, \beta_q^+)$  и функции  $F^-(y)$  на интервалы  $(\alpha_p^-, \beta_p^-)$  в виде:

$$F^+(y) = \frac{\nu_q^+(y)}{\sqrt{(y - \alpha_q^+) (\beta_q^+ - y)}}, \quad y \in (\alpha_q^+, \beta_q^+), \quad (q = 1, \dots, M^+), \quad (63)$$

$$F^-(y) = \frac{\nu_p^-(y)}{\sqrt{(y - \alpha_p^-) (\beta_p^- - y)}}, \quad y \in (\alpha_p^-, \beta_p^-), \quad (p = 1, \dots, M^-), \quad (64)$$

где

$$\nu_q^+(y) \in C[\alpha_q^+, \beta_q^+], \quad (q = 1, \dots, M^+), \quad \nu_p^-(y) \in C[\alpha_p^-, \beta_p^-], \quad (p = 1, \dots, M^-). \quad (65)$$

Введем отображения:

$$g_q^+ : [-1, 1] \rightarrow [\alpha_q^+, \beta_q^+], \quad g_q^+(t) = \frac{\beta_q^+ - \alpha_q^+}{2} \tau + \frac{\beta_q^+ + \alpha_q^+}{2}, \quad (q = 1, \dots, M^+), \quad (66)$$

$$g_p^- : [-1, 1] \rightarrow [\alpha_p^-, \beta_p^-], \quad g_p^-(t) = \frac{\beta_p^- - \alpha_p^-}{2} \tau + \frac{\beta_p^- + \alpha_p^-}{2}, \quad (p = 1, \dots, M^-), \quad (67)$$

и обозначения

$$V_q^+(\tau) = v_q^+(g_q^+(\tau)), \quad (q = 1, \dots, M^+); \quad (68)$$

$$V_p^-(\tau) = v_p^-(g_p^-(\tau)), \quad (p = 1, \dots, M^-); \quad (69)$$

$$R_{1,q,m}^+(\xi, \tau) = K_{1,0}(g_q^+(\xi), g_m^+(\tau)) - \delta_{q,m} \cdot \ln |\tau - \xi|, \quad (q = 1, \dots, M^+, \quad m = 1, \dots, M^+); \quad (70)$$

$$R_{1,p,l}^-(\xi, \tau) = K_{1,2}(g_p^-(\xi), g_l^-(\tau)) - \delta_{p,l} \cdot \ln |\tau - \xi|, \quad (p = 1, \dots, M^-, \quad l = 1, \dots, M^-); \quad (71)$$

$$R_{2,q,s}^+(\xi, \tau) = K_{1,1}(g_q^+(\xi), g_s^-(\tau)), \quad (q = 1, \dots, M^+, \quad s = 1, \dots, M^-); \quad (72)$$

$$R_{2,p,n}^-(\xi, \tau) = K_{1,1}(g_p^-(\xi), g_n^+(\tau)), \quad (p = 1, \dots, M^-, \quad n = 1, \dots, M^+). \quad (73)$$

Учитывая (63) — (64), производя замену переменных в соответствии с (66) — (67), переходим от системы ИУ (53) — (54) к системе интегральных уравнений на стандартном интервале  $(-1, 1)$ :



$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{M^+} \int_{-1}^1 R_{1,q,m}^+(\xi, \tau) \frac{V_m^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{M^-} \int_{-1}^1 R_{2,q,s}^+(\xi, \tau) \frac{V_s^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon)} e^{i\partial \ell \sin \varphi \cdot g_q^+(\xi)}, \\ |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M^+); \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| \frac{V_p^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{M^-} \int_{-1}^1 R_{1,p,l}^-(\xi, \tau) \frac{V_l^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{M^+} \int_{-1}^1 R_{2,p,n}^-(\xi, \tau) \frac{V_n^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, \\ |\xi| < 1, \quad (p = 1, \dots, M^-). \end{aligned} \quad (75)$$

Пусть:

$$R_{3,q,m}^+(\xi, \tau) = K_{2,0} (g_q^+(\xi), g_m^+(\tau)) - \delta_{q,m} \cdot \left( \frac{1}{g_q^+(\tau) - g_q^+(\xi)} \right), \\ (q = 1, \dots, M^+, \quad m = 1, \dots, M^+); \quad (76)$$

$$R_{3,p,l}^-(\xi, \tau) = K_{2,2} (g_p^-(\xi), g_l^-(\tau)) - \delta_{p,l} \cdot \frac{1}{g_p^-(\tau) - g_p^-(\xi)}, \\ (p = 1, \dots, M^-, \quad l = 1, \dots, M^-); \quad (77)$$

$$R_{4,q,s}^+(\xi, \tau) = K_{2,1} (g_q^+(\xi), g_s^-(\tau)), \\ (q = 1, \dots, M^+, \quad s = 1, \dots, M^-); \quad (78)$$

$$R_{4,p,n}^-(\xi, \tau) = K_{2,1} (g_p^-(\xi), g_n^+(\tau)), \\ (p = 1, \dots, M^-, \quad n = 1, \dots, M^+). \quad (79)$$

Система уравнений (74), (75) с логарифмической особенностью эквивалентна системе СИУ:



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{g_q^+(\tau) - g_q^+(\xi)} \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{M^+} \int_{-1}^1 R_{3,q,m}^+(\xi, \tau) \frac{V_m^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{M^-} \int_{-1}^1 R_{4,q,s}^+(\xi, \tau) \frac{V_s^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -i\partial\ell \cdot \sin\varphi \cdot e^{i\partial\ell \sin\varphi \cdot g_q^+(\xi)}, \\ & |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M^+); \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{g_p^-(\tau) - g_p^-(\xi)} \frac{V_p^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{M^-} \int_{-1}^1 R_{3,p,l}^-(\xi, \tau) \frac{V_l^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{M^+} \int_{-1}^1 R_{4,p,n}^-(\xi, \tau) \frac{V_n^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \\ & |\xi| < 1, \quad (p = 1, \dots, M^-); \quad (81) \end{aligned}$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi_q^+| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{M^+} \int_{-1}^1 R_{1,q,m}^+(\xi_q^+, \tau) \frac{V_m^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{M^-} \int_{-1}^1 R_{2,q,s}^+(\xi_q^+, \tau) \frac{V_s^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = e^{i\partial\ell \sin\varphi \cdot g_q^+(\xi_q^+)}, \\ & (q = 1, \dots, M^+); \quad (82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi_p^-| \frac{V_p^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{M^-} \int_{-1}^1 R_{1,p,l}^-(\xi_p^-, \tau) \frac{V_l^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{M^+} \int_{-1}^1 R_{2,p,n}^-(\xi_p^-, \tau) \frac{V_n^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \\ & (p = 1, \dots, M^-); \quad (83) \end{aligned}$$

где  $\xi_q^+$  ( $q = 1, \dots, M^+$ ) и  $\xi_p^-$  ( $p = 1, \dots, M^-$ ) являются произвольными, но фиксированными точками интервала  $(-1, 1)$ . Доказательство эквивалентности решений системы ИУ (74), (75) с логарифмической особенностью и системы сингулярных ИУ (80), (81) с дополнительными условиями (82), (83) дано в приложении.

Для нахождения функций  $V_q^+(\tau)$  ( $q = 1, \dots, M^+$ ) и  $V_p^-(\tau)$  ( $p = 1, \dots, M^-$ ) можно использовать систему СИУ (73), (74) с дополнительными условиями другого вида.



Для их получения умножим каждое из уравнений (74), (75) на множитель  $(1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}$  и проинтегрируем по переменной  $\xi$  от  $-1$  до  $1$ .

Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |t - t_0| \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\ln 2, \quad (84)$$

получаем

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{M^+} \int_{-1}^1 M_{1,q,m}^+(\tau) \frac{V_m^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{M^-} \int_{-1}^1 M_{2,q,s}^-(\tau) \frac{V_s^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = C_q \quad (q = 1, \dots, M^+); \quad (85)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{M^-} \int_{-1}^1 M_{1,p,l}^-(\tau) \frac{V_l^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{M^+} \int_{-1}^1 M_{2,p,n}^+(\tau) \frac{V_n^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, \quad (p = 1, \dots, M^-), \quad (86)$$

где

$$M_{1,q,m}^+(\tau) = \int_{-1}^1 R_{1,q,m}^+(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \pi \cdot \ln 2, \quad (q = 1, \dots, M^+, \quad m = 1, \dots, M^+); \quad (87)$$

$$M_{2,q,s}^+(\tau) = \int_{-1}^1 R_{2,q,s}^+(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \pi \cdot \ln 2, \quad (q = 1, \dots, M^+, \quad s = 1, \dots, M^-); \quad (88)$$

$$M_{1,p,l}^-(\tau) = \int_{-1}^1 R_{1,p,l}^-(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \pi \cdot \ln 2, \quad (p = 1, \dots, M^-, \quad l = 1, \dots, M^-); \quad (89)$$

$$M_{2,p,n}^-(\tau) = \int_{-1}^1 R_{2,p,n}^-(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \pi \cdot \ln 2, \quad (p = 1, \dots, M^-, \quad n = 1, \dots, M^+); \quad (90)$$

$$C_q = -\frac{1}{(1 + \varepsilon)} \int_{-1}^1 \exp(i\partial l \cdot g_q^+(\xi)) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (91)$$



Доказательство эквивалентности решений системы (74), (75) с логарифмической особенностью и системы сингулярных ИУ (80), (81) с дополнительными условиями (85), (86) дано в приложении.

Таким образом, построены математические модели рассматриваемой задачи теории дифракции на основе систем граничных сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями. Дискретные математические модели задач и алгоритмы численного решения системы СИУ (80), (81) с дополнительными условиями (82), (83) и системы СИУ (80), (81) с дополнительными условиями (85), (86) основываются на методе дискретных особенностей [11].

Обоснование эквивалентности решений системы с логарифмической особенностью системе СИУ с дополнительными условиями.

Процедура сведения системы интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядре к системе СИУ с дополнительными условиями неоднократно применялась при решении различных задач дифракции [8], [11], [12]. Дадим её обоснование для произвольной системы интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью в ядре

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| \frac{\vartheta_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{\vartheta_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \nu_q(\xi),$$

$$|\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (92)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{0,\psi}([-1, 1] \times [-1, 1])$ ,  $\psi > 0$  при всех возможных значениях индексов  $p$  и  $q$ . Несложно заметить, что систему интегральных уравнений (74), (75) можно свести к системе (92) с помощью введения новых переменных.

В процессе решения система интегральных уравнений первого рода (92) с логарифмической особенностью сводилась к системе СИУ

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \frac{\vartheta_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{\vartheta_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \nu_q(\xi),$$

$$|\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (93)$$

с дополнительными условиями одного из двух видов.

Первый тип условий имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi_q| \frac{\vartheta_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 \Phi_{q,p}(\xi_q, \tau) \frac{\vartheta_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \nu_q(\xi_q),$$

$$|\xi_q| < 1, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (94)$$



Данное условие получается как результат подстановки произвольных значений  $\xi_q \in (-1, 1)$  ( $q = 1, \dots, M$ ) в уравнение (92).

Второй тип условий имеет вид

$$\sum_{p=1}^M \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Lambda_{q,p}(\tau) \frac{\vartheta_q(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = F_q, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (95)$$

где

$$\Lambda_{q,p}(\tau) = \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \ln 2 \cdot \delta_{q,p} \right], \quad (96)$$

$$F_q = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\nu_q(\xi) d\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (97)$$

Данное условие получается в результате умножения обеих частей уравнений (92) на выражение  $(\pi\sqrt{1-\xi^2})^{-1}$  и интегрирования по переменной  $\xi$  от  $-1$  до  $1$ .

Пусть  $L_{2,\alpha}$  гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(u, v)_\alpha = \int_{-1}^1 u(\tau) \cdot \bar{v}(\tau) (1-\tau^2)^\alpha d\tau, \quad (98)$$

и нормой:  $\|v\|_\alpha = \sqrt{(v, v)_\alpha}$ . Рассмотрим также пространство функций:  $L_{2,-\frac{1}{2}}^0 = \{u \in L_{2,-\frac{1}{2}} \mid (u, 1)_{-\frac{1}{2}} = 0\}$ .

Следуя [12], будем рассматривать операторы

$$(\Gamma u)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{\tau - \xi} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}; \quad (99)$$

$$(Lu)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi| \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}; \quad (100)$$

$$(\Phi_{q,p}u)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{0,\psi}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \psi > 0; \quad (101)$$

$$(\partial \Phi_{q,p}u)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{u(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{0,\psi}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \psi > 0; \quad (102)$$

действующие в паре пространств  $(L_{2,-\frac{1}{2}}^0, L_{2,\frac{1}{2}})$ .

**Лемма 1.** Если вектор-функция  $Y = Y(\tau) = (\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \dots, \vartheta_M(\tau))$  является решением системы уравнений (92), то при подстановке её в систему уравнений (93), уравнения этой системы обращаются в тождество.



□ Система уравнений (92) в операторных обозначениях имеет вид

$$L\vartheta_q + \sum_{p=1}^M K_{q,p}\vartheta_p = \nu_q, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (103)$$

Пусть  $\Pi_\alpha$  — пространства полиномов со скалярным произведением  $(u, v)_\alpha$ , а  $\Pi_\alpha^0 = \{u \in \Pi_\alpha \mid (u, 1)_\alpha = 0\}$  — пространства полиномов со скалярным произведением  $(u, v)_\alpha$ , ортогональных константам.

В паре пространств  $(\Pi_{-\frac{1}{2}}^0, \Pi_{\frac{1}{2}})$  имеет место соотношения [12]

$$DL = -\Gamma, \quad (104)$$

$$D\Phi_{q,p} = \partial\Phi_{q,p}, \quad (105)$$

где  $D$  — оператор дифференцирования.

Пополняя пространство полиномов  $\Pi_{-\frac{1}{2}}^0$  по метрике, порождённой скалярным произведением  $(u, v)_{-\frac{1}{2}}$ , получим гильбертово пространство  $L_{2,-\frac{1}{2}}^0$ , а при пополнении пространства полиномов  $\Pi_{\frac{1}{2}}$  по метрике, порождённой скалярным произведением  $(u, v)_{\frac{1}{2}}$ , получим гильбертово пространство  $L_{2,\frac{1}{2}}$ .

Далее расширим по непрерывности операторы  $\Gamma$  и  $DL$  с пары пространств  $(\Pi_{-\frac{1}{2}}^0, \Pi_{\frac{1}{2}})$  на пару пространств  $(L_{2,-\frac{1}{2}}^0, L_{2,\frac{1}{2}})$ . Из того, что множества полиномов  $\Pi_{-\frac{1}{2}}^0$  и  $\Pi_{\frac{1}{2}}$  являются всюду плотными в пространствах  $L_{2,-\frac{1}{2}}^0$  и  $L_{2,\frac{1}{2}}$  соответственно, следует справедливость операторных равенств (104), (105) в паре пространств  $(L_{2,-\frac{1}{2}}^0, L_{2,\frac{1}{2}})$ .

Применяя оператор дифференцирования к левой и правой части равенства (103) и учитывая (104), (105) имеем

$$-\Gamma\vartheta_q + \sum_{p=1}^M \partial K_{q,p}\vartheta_p = D\nu_q, \quad (q = 1, \dots, M). \quad \blacksquare \quad (106)$$

**Теорема 1.** Система интегральных уравнений (92) эквивалентна системе СИУ (93) с дополнительными условиями (94).

□ На основании леммы заключаем, что если функции  $\{\vartheta_q\}_{q=1}^M$  являются решением системы уравнений (92) то они удовлетворяют системе СИУ (93) и дополнительным условиям (94), которые получаются как результат подстановки произвольных значений  $\xi_q \in (-1, 1)$  ( $q = 1, \dots, M$ ) в уравнения системы (92).

Докажем теперь обратное. Пусть функции  $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^M$  являются решением системы СИУ (93) с дополнительными условиями (94). Из (93) с учётом (104), (105) следует, что:



$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| \frac{\vartheta_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{\vartheta_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \nu_q(\xi) + C_q, \quad |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (107)$$

При подстановке значений  $\xi_q \in (-1, 1)$  ( $q = 1, \dots, M$ ) в уравнения системы (107) на основании условия (94) получаем, что  $C_q = 0$  ( $q = 1, \dots, M$ ). Таким образом показано, что если функции  $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^M$  являются решением системы СИУ (93) с дополнительными условиями (94), то они являются решением системы уравнений (92). ■

**Теорема 2.** Система интегральных уравнений (92) эквивалентна системе СИУ (93) с дополнительными условиями (95).

□ Как уже было показано ранее, из леммы следует, что если функции  $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^M$  являются решением системы уравнений (92), то они удовлетворяют системе СИУ (93).

Умножим обе части уравнений (92) на выражение  $(\pi \sqrt{1 - \xi^2})^{-1}$  и проинтегрируем по переменной  $\xi$  от  $-1$  до  $1$ .

С учётом соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = -\ln 2, \quad (108)$$

имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{p=1}^M \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \ln 2 \right] \frac{\vartheta_q(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\nu_q(\xi) d\tau}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (109)$$

Таким образом, доказано, что если функции  $\{\vartheta_q\}_{q=1}^M$  являются решением системы уравнений (92) то они удовлетворяют системе СИУ (93) с дополнительными условиями (95).

Докажем теперь обратное. Пусть функции  $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^M$  удовлетворяют системе СИУ (93) с дополнительными условиями (95).

Как было показано выше, решения системы СИУ (93) удовлетворяют соотношениям (107).

В результате умножения обеих частей уравнения (107) на выражение  $(\pi \sqrt{1 - \xi^2})^{-1}$  и интегрирования по переменной  $\xi$  от  $-1$  до  $1$  получаем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{p=1}^M \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \ln 2 \right] \frac{\vartheta_q(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\nu_q(\xi) d\tau}{\sqrt{1 - \xi^2}} + C_q, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (110)$$



Учитывая систему дополнительных условий (94) получаем, что  $C_q = 0$ ,  $(q = 1, \dots, M)$ . ■

### Литература

1. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели на основе СИУ 2D задач дифракции на многослойных периодических отражающих структурах. Часть I. Случай E-поляризации // Научные ведомости БелГУ Серия Математика. Физика. – 2011. – № 5(100). – Вып. 22. – С.5-16.
2. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: институт математики НАН Украины, 1995. – С.65-66.
3. Gandel' Yu.V. Parametric Representations of Singular Integral Transforms in Boundary Value Problems of the Diffraction // International Conference Boundary Value Problems, Special functional and Fractional Calculus. – Minsk, 1996. – P.131.
4. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных операторов и математическое моделирование в задачах электродинамики // Труды VII Международного симпозиума МДОЗМФ'97. – Феодосия, 1997. – С.176-178.
5. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения / Харьков: Вища школа, 1982. – 38. – С.15-18.
6. Гандель Ю.В. Забуга Т.А. Численный метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на решётках // Харьков, 1983. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в УкрНИИНТИ 21 ноября 1983, № 1286Ук-Д83. – 37 с.
7. Гандель Ю.В. Душкин В.Д. Численное решение сингулярного уравнения задач дифракции электромагнитных волн на решетке // Харьков: Харьков. ун-т, 1993. – 20 с. Деп. в УкрИНТЭИ № 208-УК93, 18.02.93.
8. Гандель Ю.В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы. / Ю.В. Гандель // Автореферат дисс. доктора физ.-мат. наук, Харьков, 1994, 31 с.
9. Гандель Ю.В. Душкин В.Д. Фельдман М.Б. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на периодических многоэлементных решетках, состоящих из прямоугольных брусев // Харьков, 1994. -21 с. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в ГНТБ Украины 5.12.94. № 2290-Ук94.
10. Гандель Ю.В. Душкін В.Д. Сингулярні інтегральні рівняння двовимірних задач дифракції електромагнітних хвиль // Інтегральні перетворення, Зб. наук. праць. - Київ: Ін-т математики НАН України, Вип. 13, 1996. – С.14-24.
11. Gandel' Yu.V., Lifanov place I.K., Polyanskaya T.S. On the Justification of the Method of Discrete Singularities for Two-Dimensional Diffraction Problems // Differential Equations. – 1995. – 31; 9. – P.1491-1497.
12. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений / Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с.



**MATHEMATICAL MODELS BASED ON SIE 2D DIFFRACTION PROBLEMS  
ON PERIODIC MULTILAYER REFLECTIVE STRUCTURES.**

**Part II. H-Polarization case**

**Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin**

Kharkiv National University. VN Karazin,  
Svobody sq., 4, Kharkov, 61077, Ukraine, e-mail: [Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua](mailto:Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua)  
Academy IF of MIA of Ukraine,  
Povstanya sq., 3, Kharkov, 61005, Ukraine, e-mail: [Dushkin\\_V\\_and\\_V@mail.ru](mailto:Dushkin_V_and_V@mail.ru)

**Abstract.** 2D problems of electromagnetic waves diffraction on multilayer reflecting structures lead to boundary-value problems for Helmholtz's equations. In the case of H-polarization these problems are reduced to systems of boundary singular integral equations of first kind with logarithmic additional conditions and to systems of singular integral equations of first kind with integral additional conditions. Numerical solution of these equations is based on the efficient and strictly proved method of discrete singularities.

**Key words:** diffraction problems, multilayer reflecting structures, boundary-value problems, singular integral equations.



УДК: 517.95

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

А.В. Дюжева, Л.С. Пулькина <sup>9)</sup>

Самарский государственный университет,  
ул. Академика Павлова, 1, Самара, 443011, Россия, e-mail: [aduzheva@rambler.ru](mailto:aduzheva@rambler.ru)

**Аннотация.** В статье рассматривается задача с интегральными нелокальным условием первого рода для дифференциального уравнения с частными производными. Основной целью статьи является доказательство эквивалентности поставленной задачи и задачи с интегральным условием второго рода специального вида.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, обобщенное решение.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим в области  $Q = (0, l) \times (0, T)$ , где  $l, T < \infty$ , уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти в области  $Q$  решение уравнения (88), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

граничному условию

$$u_x(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальному условию

$$\int_0^l K(x, t)u(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

В условии (4)  $K(x, t)$  задана в  $\bar{Q}$  и обладает необходимой для предстоящих преобразований гладкостью.

Особенность поставленной задачи заключается в том, что условие (4) является нелокальным интегральным условием первого рода, а ядро  $K(x, t)$ , зависит не только от пространственной переменной  $x$ , но и от переменной  $t$ .

Напомним, что *нелокальными условиями принято называть соотношения, связывающие значения искомого в области  $\Omega$  решения на некотором внутреннем многообразии и в точках границы области  $\Omega$ .*

<sup>9)</sup> Дюжева Александра Владимировна, ассистент Самарского государственного университета.  
Пулькина Людмила Степановна, профессор Самарского государственного университета.



Если в этих соотношениях отсутствуют значения искомого решения на границе области, то будем их называть нелокальными условиями *первого рода*. Если же значения искомого решения или его производных на границе области в соотношения входят, то такие соотношения называют нелокальными условиями *второго рода*. Проиллюстрируем это определение примером:

$$\lambda u_x(\xi_i, t) = \int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx, \quad (5)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = l$ ,  $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ .

Если  $\lambda \neq 0$ , то (5) — условие второго рода, а если  $\lambda = 0$  — то первого.

Нелокальные задачи давно вызывают интерес математиков, в том числе в связи с их приложениями в исследованиях различных процессов естествознания [2]–[6]. Задачи с нелокальными интегральными условиями в настоящее время активно изучаются, разрабатываются методы доказательства их разрешимости. Одним из эффективных методов исследования нелокальных задач с условиями второго рода вида (5) является метод компактности. Этот метод базируется на возможности получения тождества, лежащего в основе определения обобщенного решения задачи, с помощью известной процедуры ([1], с.210, [3]). Этот метод нельзя применить в случае нелокального условия первого рода. Однако удалось показать, что условие (4) можно свести к условию второго рода вида (5) эквивалентным образом, если выполняются условия согласования данных.

## 2. Эквивалентность нелокальных условий

**Теорема 1.** Пусть

$$c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad f(x, t) \in L_2(Q), \quad K(x, t) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q}), \quad K_{txx}(x, t) \in C(Q),$$

$$K(l, t) \neq 0, \quad K_x(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

и выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} \int_0^l K(x, 0)\varphi(x)dx &= 0, \\ \int_0^l K_t(x, 0)\varphi(x)dx + \int_0^l K(x, 0)\psi(x)dx &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда нелокальное условие первого рода (4) эквивалентно нелокальному условию второго рода

$$u_x(l, t) = T(u(0, t), u(l, t)), \quad (7)$$

где  $T$  — линейный оператор, вид которого будет представлен ниже в ходе доказательства.



□ Пусть  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (88) и условиям (89), (3), (4). Дифференцируя равенство (4) дважды по  $t$ , получим:

$$\int_0^l K(x, t)u_{tt}(x, t)dx + 2 \int_0^l K_t(x, t)u_t(x, t)dx + \int_0^l K_{tt}(x, t)u(x, t)dx = 0. \quad (8)$$

Так как  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (88), то

$$\int_0^l K(x, t)u_{tt}(x, t)dx = \int_0^l K(x, t)[u_{xx} - c(x, t)u + f(x, t)]dx;$$

$$\int_0^l K_t(x, t)u_t(x, t)dx = \int_0^l K_t(x, t)[\psi(x) + \int_0^t (u_{xx} - c(x, \tau)u + f(x, \tau))d\tau]dx.$$

Интегрируя теперь содержащие  $u_{xx}$  слагаемые двух последних равенств, получим из (8):

$$u_x(l, t) + a(t) \int_0^t u_x(l, \tau)d\tau = b(t)u(l, t) + \gamma(t) \int_0^t u(l, \tau)d\tau -$$

$$- \int_0^l S(x, t)u(x, t)dx - \int_0^t \int_0^l H(x, t, \tau)u(x, \tau)dx d\tau - g(t), \quad (9)$$

где обозначено

$$a(t) = \frac{2K_t(l, t)}{K(l, t)}, \quad b(t) = \frac{K_x(l, t)}{K(l, t)}, \quad \gamma(t) = \frac{2K_{xt}(l, t)}{K(l, t)};$$

$$S(x, t) = \frac{K_{tt}(x, t) + K_{xx}(x, t)}{K(l, t)}, \quad H(x, t, \tau) = 2 \frac{K_t(x, t)c(x, \tau) - K_{txx}(x, t)}{K(l, t)};$$

$$g(t) = 2 \int_0^l K_t(x, t)[\varphi(x) + \int_0^t f(x, \tau)d\tau]dx.$$

Рассматривая соотношение (9) как уравнение Вольтерра с ограниченным в силу условий теоремы ядром, получим его единственное решение:

$$u_x(l, t) = G(t) - a(t) \int_0^t G(\tau)e^{-\int_\tau^t a(\eta)d\eta} d\tau, \quad (10)$$

где обозначено

$$G(t) = b(t)u(l, t) - \int_0^l S(x, t)u(x, t)dx + \gamma(t) \int_0^t u(l, \tau)d\tau -$$



$$- \int_0^t \int_0^l H(x, t, \tau) u(x, \tau) dx d\tau - g(t).$$

Из последних двух равенств видим, что правые части (10) не содержат производных искомого решения, в том числе их следов, и являются соотношениями между значениями решения во внутренних точках области и на ее границе. Таким образом, (10) – нелокальное условие второго рода вида (5).

Пусть теперь  $u(x, t)$  – решение уравнения (88), удовлетворяющее условиям (89), (3) и (10). Но тогда выполняются и равенства (8), из которых и получены условия (10). Равенства (8) запишем следующим образом:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^l K(x, t) u(x, t) dx = 0. \quad (11)$$

Из условий согласования (6) вытекают начальные условия

$$\begin{aligned} \int_0^l K(x, 0) u(x, 0) dx &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_0^l K(x, t) u(x, t) dx \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача Коши (11)–(12) имеет единственное решение

$$\int_0^l K(x, t) u(x, t) dx = 0,$$

что и означает выполнение условия (4). ■

### 3. Разрешимость задачи.

Решением задачи будем называть функцию  $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющую условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$  и тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + u_x v_x + cuv) dx dt + \\ & + \int_0^T v(l, t) \left[ G(t) - a(t) \int_0^t G(\tau) e^{-\int_\tau^t a(\eta) d\eta} d\tau \right] dt = \end{aligned}$$



$$= \int_0^l v(x, 0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l f(x, t)v(x, t)dxdt \quad (13)$$

для любой функции  $v(x, t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ , где  $\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(Q_T), v(x, T) = 0\}$ .

**Теорема 2.** *Если выполнены условия*

$$\begin{aligned} c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\bar{Q}), \\ K(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad K(x, t) \in C^2(Q), \quad K_{txx} \in C(Q), \\ K(l, t) \neq 0, \quad K_x(0, t) = 0, \\ f(x, t) \in L_2(Q), f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad \varphi(x) \in W_2^1(0, l), \quad \psi(x) \in L_2(0, l), \\ \int_0^l K(x, 0)\varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^l K_t(x, 0)\varphi(x)dx + \int_0^l K(x, 0)\psi(x)dx = 0, \end{aligned}$$

то существует единственное решение поставленной задачи.

□ Начнем с доказательства единственности решения. Предположим, что существует два различных решения,  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . Тогда их разность,  $u = u_1 - u_2$ , удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + u_x v_x + cuv)dxdt + \int_0^T v(l, t)G(t)dt - \\ - \int_0^T v(l, t)a(t) \int_0^t G(\tau)e^{-\int_\tau^t a(\eta)d\eta} d\tau dt = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

и  $u(x, 0) = 0$ . Выберем в (14)

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x, \eta)d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \quad (15)$$

Первое слагаемое преобразуем стандартным образом и получим

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + u_x v_x + cuv)dxdt = -\frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x, \tau) + v_x^2(x, 0)]dx + \int_0^\tau \int_0^l cuv_t dxdt.$$

Наибольший интерес представляют два других слагаемых, к изучению которых и перейдем. Особое внимание уделим интегралам, содержащим следы функции  $v(x, t)$  и ее производной.



Отметим, что из условий теоремы следует существование положительных постоянных  $a_0, b_0, c_0, \gamma_0, h_0, s_0$  таких, что

$$\max_{[0,T]} |a(t)| \leq a_0, \max_{[0,T]} |b(t), b'(t)| \leq b_0, \max_{\bar{Q}} |c(x, t)| \leq c_0, \max_{[0,T]} |\gamma(t)| \leq \gamma_0,$$

$$\max_{[0,T]} \left| \int_0^l S^2(x, t) dx \right| \leq s_0, \max_{[0,T]} \left| \int_0^T \int_0^l H^2(x, t, \tau) dx dt \right| \leq h_0.$$

Рассмотрим второе слагаемое (14) и слегка преобразуем:

$$\begin{aligned} \int_0^T v(l, t) G(t) dt &= \int_0^T v(l, t) [b(t) v_t(l, t) + \gamma(t) \int_0^t v_\eta(l, \eta) d\eta] dt - \\ &- \int_0^T v(l, t) \left[ \int_0^l S(x, t) v_t(x, t) dx + \int_0^t \int_0^l H(x, \tau, \eta) v_\eta(x, \eta) dx d\eta \right] dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^T v(l, t) b(t) v_t(l, t) dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T b'(t) v^2(l, t) dt - \frac{1}{2} v^2(l, 0), \\ \int_0^t v_\eta(x, \eta) d\eta &= v(l, t) - v(l, 0), \end{aligned}$$

то получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T v(l, t) G(t) dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T b'(t) v^2(l, t) dt - \frac{1}{2} v^2(l, 0) + \\ &+ \int_0^T \gamma(t) v^2(l, t) dt - v(l, 0) \int_0^T \gamma(t) v(l, t) dt - \\ &- \int_0^T v(l, t) \left[ \int_0^l S(x, t) v_t(x, t) dx + \int_0^t \int_0^l H(x, \tau, \eta) v_\eta(x, \eta) dx d\eta \right] dt. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим третье слагаемое, и, сделав аналогичные преобразования и обозначив  $A(t, \tau) = e^{-\int_\tau^t a(\eta) d\eta}$ , получим

$$\int_0^T v(l, t) a(t) \int_0^t G(\tau) A(t, \eta) \int_\tau^t a(\eta) d\eta d\tau dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^\tau v(l, t) a(t) \int_0^t (A(t, \eta) b(\eta))_\eta v(l, \eta) d\eta dt + \int_0^\tau a(t) b(t) v^2(l, t) dt - \\
 &- b(0) v(l, 0) \int_0^\tau a(t) A(t, 0) v(l, t) dt + \int_0^\tau a(t) v(l, t) \int_0^t \gamma(\eta) A(t, \eta) v(l, \eta) d\eta dt - \\
 &\quad - v(l, 0) \int_0^\tau v(l, t) a(t) \int_0^t A(t, \eta) \gamma(\eta) d\eta dt - \\
 &\quad - \int_0^\tau a(t) v(l, t) \int_0^t A(t, \eta) \int_0^l S(x, \eta) v_\eta(x, \eta) dx d\eta dt - \\
 &\quad - \int_0^\tau v(l, t) a(t) \int_0^t A(t, \eta) \int_0^\eta \int_0^l H(x, \eta, \xi) v_\xi(x, \xi) dx d\xi d\eta dt.
 \end{aligned}$$

Теперь приступим к выводу оценки, для чего воспользуемся неравенством Коши, а также неравенством

$$v^2(l, t) \leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, t) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x, t) dx, \tag{16}$$

справедливым для всех  $t \in [0, T]$ , которое выводится из равенства

$$v(l, t) = \int_x^l v_\xi(\xi, t) d\xi + v(x, t).$$

Нам также будет полезно неравенством

$$v^2(x, t) \leq \tau \int_0^\tau v_t^2(x, t) dt, \tag{17}$$

которое вытекает из представления функции  $v(x, t)$ . Получим:

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + v_x^2(x, 0)] dx \leq m\varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + M \int_0^\tau \int_0^l v_t^2(x, t) dx dt, \tag{18}$$

где числа  $m, M$  зависят от  $a_0, b_0, c_0, \gamma_0, h_0, s_0$ . Выбрав  $\varepsilon = \frac{1}{2m}$ , получаем возможность перенести первое слагаемое правой части в левую. Тогда справедливо

$$\int_0^l u^2(x, \tau) dx \leq N \int_0^\tau \int_0^l v_t^2(x, t) dx dt,$$



применив к которому лемму Гронуолла, (учитывая, что  $v_t(x, t) = u(x, t)$ ), приходим к утверждению о единственности решения задачи.

Доказательство существования решения задачи проведено по известной схеме: построена последовательность приближенных решений методом Галеркина; доказана ограниченность полученного множества приближенных решений в пространстве  $W_2^1(Q)$ , что позволило выделить слабо сходящуюся в  $W_2^1(Q)$  подпоследовательность; показано, что предел выделенной подпоследовательности и является искомым решением.

Не останавливаясь на подробных вычислениях, отметим особенность реализации этой схемы в условиях рассматриваемой задачи: при построении приближенных решений мы приходим к системе интегродифференциальных уравнений, которая редуцируется к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Априорная оценка получена с помощью техники, продемонстрированной при доказательстве единственности решения. Возможность предельного перехода показывается стандартным образом. ■

**Замечание 1.** Полученные результаты нетрудно распространить на случай более общего уравнения

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t).$$

Если  $a(x, t) \in C(\bar{Q})$ ,  $a_t(x, t) \in C(\bar{Q})$ , то можно показать, что полученные выше оценки справедливы, однако вывод их еще более громоздок.

**Замечание 2.** Можно рассматривать задачу с двумя нелокальными условиями

$$\int_0^l K_i(x, t)u(x, t)dx = 0.$$

В этом случае условия  $K(l, t) \neq 0$ ,  $K_x(0, t) = 0$  должны быть заменены условием

$$K_1(0, t)K_2(l, t) - K_1(l, t)K_2(0, t) \neq 0.$$

### Литература

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / М.: Наука, 1973.
2. Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела / Сообщ. Харьковско-го мат. о-ва/ – 1986. – 5;(3-4). – С.136-181.
3. Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. – 2006. – 2;42. – С.15-27.
4. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. – 2008. – 3;62. – С.165-174.
5. Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. – 2010. – 4;78. – С.56-64.
6. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал института математики МО и Н РК, Алматы. – 2009. – 2;32. – С.78-92.



NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION  
WITH FIRST INTEGRAL CONDITION

A.V. Duzheva, L.S. Pulkina

Samara State University,  
Academician Pavlov St., 1, Samara, 443011, Russia, e-mail: [aduzheva@rambler.ru](mailto:aduzheva@rambler.ru), [louise@samdiff.ru](mailto:louise@samdiff.ru)

**Abstract.** In this article, we consider a nonlocal problem with integral condition of the first kind. The main goal is to prove equivalence of a nonlocal problem with integral conditions of the first kind and nonlocal problem with integral conditions of the second kind in special form.

**Key words:** hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, generalized solution.



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

## КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЕ. <sup>10)</sup>

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцев, О.А. Гальцева <sup>11)</sup>

Белгородский государственный университет,  
ул.Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: [reshat85@mail.ru](mailto:reshat85@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматривается начально-краевая задача для системы, состоящей из уравнений Стокса, описывающих движение несжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве и уравнения Ламе в твердом скелете. Система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости. Считается, что плотность жидкости зависит от концентрации примеси. Для рассматриваемой математической модели доказывается существование по крайней мере одного обобщенного решения.

**Ключевые слова:** система уравнений Стокса и Ламе, конвективное уравнение диффузии.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $\Omega \in R^3$  ограниченная связная область с липшицевой границей  $S$ , полученная периодическим повторением элементарной ячейки  $\varepsilon\bar{Y}$ , где  $\varepsilon > 0$  малый параметр,

$$\bar{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1), \quad \varepsilon Y = (0, \varepsilon) \times (0, \varepsilon) \times (0, \varepsilon),$$

где  $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$  – липшицева граница между множествами  $Y_f$  и  $Y_s$ .

Через  $\bar{\Omega}_f^\varepsilon$  обозначим периодическое повторение элементарной ячейки  $\varepsilon\bar{Y}_f$ , а через  $\bar{\Omega}_s^\varepsilon$  – периодическое повторение  $\varepsilon\bar{Y}_s$ . Тогда

$$\Omega = \bar{\Omega}_f^\varepsilon \cup \bar{\Omega}_s^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon,$$

где  $\Gamma^\varepsilon = \partial\bar{\Omega}_f^\varepsilon \cap \partial\bar{\Omega}_s^\varepsilon$  – периодическое повторение границы  $\varepsilon\gamma$ .

При этом будем считать, что область  $Y_s$  полностью окружена областью  $Y_f$  (см. рис. 1), то есть

$$\bar{Y}_s \cap \partial Y = \emptyset.$$

В области  $\Omega$  рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\nabla \cdot \left( \chi^\varepsilon \mu_0 \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I} \right) + \rho(c^\varepsilon) \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

<sup>10</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613).

<sup>11</sup>Мейрманов Анварбек Мукаатович, профессор Белгородского государственного университета.

Зимин Р.Н., аспирант Белгородского государственного университета.

Гальцев О.В., аспирант Белгородского государственного университета.

Гальцева О.А., аспирант Белгородского государственного университета.



$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in S = \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\chi^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4}$$

$$\int_{\Omega} p^\varepsilon d\mathbf{x} = 0, \tag{5}$$

где  $\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = (w_1^\varepsilon(\mathbf{x}, t), w_2^\varepsilon(\mathbf{x}, t), w_3^\varepsilon(\mathbf{x}, t))$  – перемещение сплошной среды,  $p^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  – давление в сплошной среде,  $c^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  – концентрация примеси,  $\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  – симметричная часть градиента вектора  $\mathbf{v}$  (тензор напряжений),  $\mathbb{I}$  – единичная матрица,  $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$  – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^\varepsilon) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\delta c^\varepsilon(\mathbf{x}, t),$$

$\mu_0$  – безразмерная вязкость жидкости,  $\lambda_0$  – безразмерная постоянная Ламэ,  $\delta$  – положительная постоянная.

Рис. 1 Геометрия элементарной ячейки.

Концентрация примеси определяется только в области  $\Omega_f^\varepsilon$  как решение начально – краевой задачи

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla c^\varepsilon = D_0 \Delta c^\varepsilon, \tag{6}$$

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma^\varepsilon \cup S, t > 0, \tag{7}$$

$$c^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \tag{8}$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma^\varepsilon$ ,  $D_0$  – коэффициент диффузии. Обзор результатов по данной задаче можно найти в ([6]).



## 2. Основной результат

**Определение 1.** Функции  $\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ ,  $p^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  и  $c^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  называются обобщенным решением задачи (1) – (8) в области  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ , если

$$1) p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T), \quad \mathbf{w}^\varepsilon \in W_2^{1,1}(\Omega_f^\varepsilon \times (0, T)) \cap W_2^{1,0}(\Omega_s^\varepsilon \times (0, T)),$$

$$c^\varepsilon \in L_\infty(\Omega_f^\varepsilon \times (0, T)) \cap W_2^{1,0}(\Omega_f^\varepsilon \times (0, T));$$

2) почти всюду в области  $\Omega_T$  выполнено уравнение (2);

3) функции  $\mathbf{w}^\varepsilon$ ,  $p^\varepsilon$  и  $c^\varepsilon$  удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \left( \chi^\varepsilon \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) + (1 - \chi^\varepsilon) \lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) - p^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) dx dt = \int_{\Omega_T} \rho(c^\varepsilon) \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt \quad (9)$$

для произвольной гладкой вектор-функции  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ , равной нулю на границе  $S$  и при  $t = T$  и интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left( c^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla c^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \psi - D_0 \nabla c^\varepsilon \cdot \nabla \psi \right) dx dt = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} c_0(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, 0) dx \quad (10)$$

для произвольной гладкой функции  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , равной нулю при  $t = T$ .

Здесь используется обозначение:  $A : B \equiv \text{tr}(AB^T)$ , где  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы. Верна следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть

$$0 \leq c_0(\mathbf{x}) \leq 1, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_T} \left( |\mathbf{F}|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right|^2 \right) dx dt \leq F^2, \quad |\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)| \leq F. \quad (12)$$

Тогда задача (1) – (8) имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки

$$\max_{0 < t < T} \lambda_0 \int_{\Omega} (1 - \chi) |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx + \int_{\Omega_T} \left( \mu_0 \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 + |p^\varepsilon|^2 \right) dx dt \leq MF^2, \quad (13)$$

$$0 \leq c^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \leq 1. \quad (14)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla c^\varepsilon|^2 dx dt \leq MF^2, \quad (15)$$

$$\max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \chi \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx + \int_{\Omega_T} (1 - \chi) \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx dt \leq MF^2, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t_1) - \nabla \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t_2)|^2 dx \leq C |t_1 - t_2|^{1/2}, \quad (17)$$

где функция  $\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)$  описана ниже.



### 3. Доказательство теоремы

Для упрощения записи, если не оговорено противное, индекс  $\varepsilon$  опускаем.

Рассмотрим следующую вспомогательную начально – краевую задачу, состоящую из системы уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \left( \mu_0 \chi \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) - q \mathbb{I} \right) + \rho(c) \mathbf{F} = 0, \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (19)$$

в области  $\Omega$  при  $t > 0$ , дополненную условиями

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{при } \mathbf{x} \in S, \quad (20)$$

$$\chi \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} q \, dx = 0, \quad (22)$$

и уравнением диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbb{M}^{(h)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \nabla c = D_0 \Delta c, \quad (23)$$

для концентрации примеси в области  $\Omega_f$  при  $t > 0$ , дополненное условиями

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma \cup S, \quad (24)$$

$$c(\mathbf{x}, 0) = \mathbb{M}^{(h)}(c_0(\mathbf{x})), \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad (25)$$

где

$$\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \frac{1}{h^4} \int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{h} \right) \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) \, d\mathbf{y}$$

– оператор сглаживания по переменным  $\mathbf{x}$  и  $t$ , где ядро усреднения  $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$  – четная неотрицательная функция,  $\eta(\mathbf{x}) = 0$ , если  $|\mathbf{x}| \geq 1$ ,  $\int_{|\mathbf{x}| \leq 1} \eta(|\mathbf{x}|) \, ds = 1$ . Сглаженные функции являются гладкими, финитными и при  $h \rightarrow 0$  сходятся по норме  $L_2(\Omega'_{T-\beta})$  в любой строго внутренней подобласти  $\Omega'_{T-\beta} \subset \Omega_T$ ,  $h \leq \beta$  (см. [1]).

Для решения задачи (18) – (25) воспользуемся теоремой Шаудера о неподвижной точке. А именно, фиксируем множество  $\mathfrak{M} = \{\bar{c}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}(\Omega_T) \mid 0 \leq \bar{c} \leq 1\}$ .

Пусть  $\mathbf{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial \mathbf{u} / \partial t)$  есть продолжение  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  из области  $\Omega_f$  в  $\Omega$  такое, что

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega_f} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 \, dx,$$

$$\int_{\Omega} |\mathbb{D}(x, \mathbf{v})|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega_f} \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right|^2 \, dx,$$



$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

с постоянной  $C$  не зависящей от  $\varepsilon$  ([7]).

В первую очередь решим задачу (18) – (22) с  $\rho = \rho(\bar{c})$ , где  $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ . Полученное решение определяет оператор  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbb{A}(\bar{c})$ , действующий из пространства  $\mathfrak{M}$  в пространство  $\mathfrak{N}$  с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}}^2 = \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} (1 - \chi) |\mathbb{D}(x, \mathbf{u})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \chi \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right|^2 dx dt.$$

Вектор функции из  $\mathfrak{N}$  так же удовлетворяют условиям

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f.$$

Легко показать, что справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{2, \Omega_T}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{2, \Omega_T}^2 &\leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}} \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{2, \Omega_f \times (0, T)} &\leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbb{A}(\bar{c})$  в уравнение диффузии (23) приходим к следующей начально – краевой задаче об определении функции  $c(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbb{M}^{(h)} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \cdot \nabla c = D_0 \Delta c, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega_f, \quad (28)$$

$$c(\mathbf{x}, 0) = \mathbb{M}^{(h)}(c_0(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad (29)$$

которая определяет оператор на множестве  $\mathfrak{N}$ :  $c = \mathbb{B}(\bar{\mathbf{u}})$ . Полученная задача с гладкими коэффициентами хорошо изучена (см. [3]) и при каждом фиксированном  $h > 0$ , имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение, для которого справедливы принцип максимума

$$0 \leq c \leq 1, \quad (30)$$

и энергетическое неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} |\nabla c|^2 dx dt \leq M \int_{\Omega_T} |\mathbf{v}|^2 dx dt. \quad (31)$$

Здесь и всюду ниже через  $M$  обозначаем постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$  и от параметра сглаживания  $h$ .

Суперпозиция

$$c = \mathbb{B} \circ \mathbb{A}(\bar{c}) = \Phi(\bar{c})$$



есть искомый оператор, неподвижные точки которого  $c_h = \Phi(c_h)$  определяют решение задачи (18)–(25)  $c = c_h$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$ ,  $q = q_h$ .

Оценка (30) и гладкость решения задачи (27) – (29) показывают, что оператор  $\Phi$  переводит множество  $\mathfrak{M}$  в себя:

$$\Phi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}.$$

Если мы докажем, что оператор  $\Phi$  вполне непрерывен, то согласно теореме Шаудера он имеет неподвижную точку. Для этого воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

**Лемма 1.** В условиях Теоремы 1 для каждого фиксированного  $\bar{c}(x, t) \in \mathfrak{M}$  задача (18) – (22) имеет единственное обобщенное решение  $\bar{\mathbf{u}}$  и для него справедливы оценки:

$$\max_{0 < t < T} \lambda_0 \int_{\Omega} (1 - \chi) |\mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{u}})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \left( \mu_0 \chi \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) \right|^2 + |\bar{q}|^2 \right) dx dt \leq MF^2. \quad (32)$$

$$\max_{0 < t < T} \mu_0 \int_{\Omega} \chi \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) \right|^2 dx + \int_{\Omega_T} (1 - \chi) \lambda_0 \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) \right|^2 dx dt \leq MF^2. \quad (33)$$

□ Доказательство существования единственного обобщенного решения задачи (18) – (22) и получение оценки (32) повторяет аналогичные доказательства в ([4]), ([5]). Продифференцируем теперь (18) по  $t$ , умножим на  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  и проинтегрируем по области  $\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \chi |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})|^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega} (1 - \chi) |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})|^2 dx = \\ \delta \int_{\Omega} \chi \frac{\partial c}{\partial t} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \chi \rho(c) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} I = \delta \int_{\Omega} \chi \frac{\partial c}{\partial t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx = \delta \int_{\Omega} \chi (\nabla \cdot (D_0 \nabla c) - \mathbf{v} \cdot \nabla c) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dx = \\ \delta \int_{\Omega} \chi (-D_0 \nabla c \cdot (\nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla c) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})) dx. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались уравнением диффузии и тем, что

$$\chi(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

Используя неравенства Гельдера, Коши, Пуанкаре – Фридрихса и Корна и оценками (31) и (32) имеем

$$|I| \leq M \int_{\Omega} \chi |\mathbf{v}|^2 |\nabla c| dx + M \int_{\Omega} \chi |\nabla c|^2 dx + M \int_{\Omega} \chi |\mathbb{D}(x, \mathbf{v})|^2 dx.$$



Основное слагаемое здесь

$$I_0 = \int_{\Omega} \chi |\mathbf{v}|^2 |\nabla c| dx \leq \left( \int_{\Omega} \chi |\mathbf{v}|^4 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \chi |\nabla c|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Оценив первый сомножитель по теореме вложения ([2]), получим

$$I_0 \leq \beta \int_{\Omega} \chi |\mathbb{D}(x, \mathbf{v})|^2 dx \left( \int_{\Omega} \chi |\nabla c|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Положим

$$y(t) = \int_{\Omega} \chi |\mathbb{D}(x, \mathbf{v})|^2 dx,$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} \leq MF^2 + y \left( \int_{\Omega} \chi |\nabla c|^2 dx \right)^{1/2},$$

согласно неравенству Гронуолла (см. [3])

$$y(t) \leq MF^2 T \exp \left( \int_0^t a(\tau) d\tau \right),$$

где

$$a(t) = \left( \int_{\Omega} \chi |\nabla c|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Не сложно проверить, что

$$\int_0^t a(\tau) d\tau \leq \sqrt{t} \left( \int_0^t |a(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Окончательно получим:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} \chi |\mathbb{D}(x, \mathbf{v}(x, t))|^2 dx \leq MF^2 T \exp(\sqrt{T} \int_{\Omega_T} \chi |\nabla c|^2 dx dt). \blacksquare$$

**Лемма 2.** Оператор  $\mathbb{A}$  непрерывный.

□ Пусть

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbb{A}(\bar{c}_1), \quad \bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbb{A}(\bar{c}_2), \quad \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2,$$

$$\bar{c} = \bar{c}_1 - \bar{c}_2, \quad \bar{q} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2,$$

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_1}{\partial t}, \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_2}{\partial t}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2.$$

Тогда для разности  $\bar{\mathbf{u}}$  имеем

$$\nabla \cdot (\mu_0 \chi \mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{v}}) + \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{u}}) - \bar{q} \mathbb{I}) = -\chi \delta \bar{c} \mathbf{F}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \quad (34)$$



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in S, \\ \chi \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \int_{\Omega} \bar{q} \, dx = 0. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (34) на функцию  $\bar{\mathbf{v}}$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Интеграл, стоящий в правой части оценим с помощью неравенств Гельдера и Коши с  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \lambda_0(1 - \chi) |\mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{u}})|^2 dx + \int_{\Omega} \mu_0 \chi |\mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{v}})|^2 dx &= \left| - \int_{\Omega} \chi \delta \bar{c} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{\delta}{2\beta} F^2 (|\bar{c}|_{\Omega_f \times (0, T)}^{(0)})^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \chi |\bar{\mathbf{v}}|^2 dx. \end{aligned}$$

Применив ко второму слагаемому последовательно неравенства Пуанкаре – Фридрикса и Корна, и положив  $\beta = \mu_0/C$ , получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \lambda_0(1 - \chi) |\mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{u}})|^2 dx + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega} \chi |\mathbb{D}(x, \bar{\mathbf{v}})|^2 dx \leq M_1 F^2 \|\bar{c}\|_{\mathfrak{M}}^2. \quad (35)$$

Проинтегрировав (35) по  $t$ , получим непрерывность оператора  $\mathbb{A}$ . А именно,

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathfrak{M}} \leq M_2 F^2 \|\bar{c}\|_{\mathfrak{M}}. \quad \blacksquare$$

**Лемма 3.** Оператор  $\mathbb{B}$  непрерывный.

□ Пусть

$$\begin{aligned} c_1 &= \mathbb{B}(\bar{\mathbf{u}}_1), \quad c_2 = \mathbb{B}(\bar{\mathbf{u}}_2), \quad c = c_1 - c_2, \quad \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \\ \bar{\mathbf{w}}_1 &= \mathbb{M}^{(h)}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_1}{\partial t}\right), \quad \bar{\mathbf{w}}_2 = \mathbb{M}^{(h)}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_2}{\partial t}\right), \quad \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}}_1 - \bar{\mathbf{w}}_2. \end{aligned}$$

Тогда разность  $c(\mathbf{x}, t)$  является решением следующей начально – краевой задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D_0 \Delta c + \bar{\mathbf{w}}_1 \nabla c - \bar{\mathbf{w}} \nabla c_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad t \in (0, T); \quad (36)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega_f, \quad c(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f. \quad (37)$$

Умножим (36) на  $c(\mathbf{x}, t)$  и проинтегрируем по области  $\Omega_f$ , применяя формулу интегрирования по частям

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} |c|^2 dx + D_0 \int_{\Omega_f} |\nabla c|^2 dx = \int_{\Omega_f} \bar{\mathbf{w}}_1 \cdot (c \nabla c) dx + \int_{\Omega_f} \bar{\mathbf{w}} \cdot (c_2 \nabla c) dx.$$

Функции  $c_2$  и  $\bar{\mathbf{w}}_1$  ограничены по построению. Оценим правую часть

$$\left| \int_{\Omega_f} \bar{\mathbf{w}}_1 \cdot (c \nabla c) dx + \int_{\Omega_f} \bar{\mathbf{w}} \cdot (c_2 \nabla c) dx \right| \leq N_1 \left( \int_{\Omega_f} (c \nabla c) dx + \int_{\Omega_f} \bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla c dx \right) \leq$$



$$\leq N_2 \left( \int_{\Omega_f} |c|^2 dx + \int_{\Omega_f} |\bar{w}|^2 dx \right) + N_3 \int_{\Omega_f} |\nabla c|^2 dx .$$

Проинтегрировав по  $t$  обе части неравенства получим

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega_f} |c|^2 dx + D_1 \int_0^T \int_{\Omega_f} |\nabla c|^2 dx \leq N_2 \left[ \int_0^T \int_{\Omega_f} |\bar{w}|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_f} |c|^2 dx , dt \right]$$

$$c(\mathbf{x}, 0) = 0 .$$

Воспользуемся теперь неравенством Гронуолла:

$$\int_{\Omega_f} |c|^2 dx \leq N_4 \int_0^T \int_{\Omega_f} |\bar{w}|^2 dx dt .$$

Последнее неравенство, учитывая свойства сглаживания, определение нормы во множестве  $\mathfrak{N}$  и неравенство (26), можно переписать следующим образом:

$$\|c\|_{2, \Omega_f \times (0, T)}^2 \leq N_5 \|\bar{u}\|_{\mathfrak{N}}^2 .$$

Чтобы получить оценку для  $|c|_{\Omega_t}^0$ , обратимся к Лемме 3.3 ([3], с.95). Нас интересует утверждение леммы о том, что если  $u(x, t) \in \mathbb{W}_q^{2l, l}(\Omega_T)$  и  $2l - 2r - s - (n + 2)/q > 0$ , то при  $0 \leq \lambda < 2l - 2r - s - (n + 2)/q$

$$\langle D_t^r D_x^s u \rangle_{\Omega_T}^{(\lambda)} = b_1 \eta^{2l - 2r - s - \frac{n+2}{q} - \lambda} \langle \langle u \rangle \rangle_{\Omega_T}^{2l} + b_2 \eta^{-(2r + s + \frac{n+2}{q} + \lambda)} \|u\|_{q, \Omega_T} .$$

В нашем случае  $c(x, t) \in \mathbb{W}_2^{2, 1}(\Omega_T)$ , то есть  $l = 1$ ,  $r = 0$ ,  $s = 0$ ,  $n = 3$ ,  $\lambda = 0$ ,

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} = b_1 \eta^{\frac{1}{3}} \langle \langle c \rangle \rangle_{3, \Omega_T}^{(2)} + b_2 \eta^{-\frac{5}{3}} \|c\|_{3, \Omega_T} \equiv A \eta^{\frac{1}{3}} + B \eta^{-\frac{5}{3}} \equiv f(\eta) .$$

Функция  $f(\eta)$  достигает минимума при  $\eta = (\frac{5B}{A})^{1/2}$ , в этом случае  $f(\eta) = b_3 A^{5/6} B^{1/6}$  и

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} = b_4 (\langle \langle c \rangle \rangle_{3, \Omega_T}^{(2)})^{5/6} (\|c\|_{3, \Omega_T})^{1/6} .$$

Окончательно получаем следующую оценку:

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leq b_5 \|c\|_{3, \Omega_T} .$$

Справедливо также следующее неравенство:

$$\|c\|_{3, \Omega_T} \leq a_1 \eta^{\frac{7}{6}} \langle \langle c \rangle \rangle_{2, \Omega_T}^{(2)} + a_2 \eta^{-\frac{5}{6}} \|c\|_{2, \Omega_T} \equiv A \eta^{\frac{7}{6}} + B \eta^{-\frac{5}{6}} \equiv f(\eta) .$$

Совершенно аналогично получим

$$\|c\|_{3, \Omega_T} \leq a_3 \|c\|_{2, \Omega_T} .$$

Окончательно имеем  $\|c\|_{\mathfrak{N}} \leq N \|\bar{u}\|_{\mathfrak{N}}$ , что и означает непрерывность оператора  $\mathbb{B}$ . ■



**Лемма 4.** *Оператор  $\Phi$  вполне непрерывен.*

□ Оператор  $\Phi$  является непрерывным, как суперпозиция непрерывных операторов. Для доказательства того, что он вполне непрерывен воспользуемся теоремой Арцела. В нашей задаче для фиксированного  $h > 0$  функции  $c_h(\mathbf{x}, t)$  по построению обладают ограниченными производными по  $\mathbf{x}$  и по  $t$ , следовательно

$$|c_h(\mathbf{x}', t) - c_h(\mathbf{x}'', t)| \leq \left| \frac{\partial c_h(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x_j} \right| |x'_j - x''_j| \leq k_1 |x'_j - x''_j|, \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$|c_h(\mathbf{x}, t') - c_h(\mathbf{x}, t'')| \leq \left| \frac{\partial c_h(\mathbf{x}, t^*)}{\partial t} \right| |t' - t''| \leq k_2 |t' - t''|,$$

то есть функции  $c_h(\mathbf{x}, t)$  равномерно непрерывны по  $\mathbf{x}$  и по  $t$ . Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор  $\Phi$  является вполне непрерывным. ■

Так же легко показать, что множество  $\mathfrak{M}$  является выпуклым. Следовательно, существует неподвижная точка оператора  $\Phi$ , обозначим ее как  $c_h$ ,

$$c_h = \Phi(c_h),$$

и пусть  $\mathbf{u}_h = \mathbb{A}(c_h)$ . Тогда  $c_h$  является решением следующей задачи:

$$\nabla \cdot (\mu_0 \chi \mathbb{D}(x, \mathbf{v}_h) + \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(x, \mathbf{u}_h) - q_h) \mathbb{I} + \rho(c_h) \mathbf{F} = 0, \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0, \quad (39)$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in S, \quad (40)$$

$$\chi \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (41)$$

$$\int_{\Omega} q_h dx = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_h) \cdot \nabla c_h = D_0 \Delta c_h, \quad \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad t \in (0, T), \quad (43)$$

$$\frac{\partial c_h}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma \cup S \quad (44)$$

$$c_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbb{M}^{(h)}(c_0(\mathbf{x})) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega_f, \quad (45)$$

где (43) понимается как интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} \left( c_h \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla c_h \cdot \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_h) \psi - D_0 \nabla c_h \cdot \nabla \psi \right) dx dt = - \int_{\Omega_f} \mathbb{M}^{(h)}(c_0) \psi(\mathbf{x}, 0) dx,$$

для произвольной гладкой функции  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , равной нулю при  $t = T$ .

**Лемма 5.** *В условиях Теоремы 1 при фиксированном  $h > 0$  для функции  $\mathbf{v}_h = \mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial \mathbf{u}_h / \partial t)$ , где  $\mathbf{u}_h = \mathbb{A}(c_h)$ , справедлива оценка*

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t_1) - \nabla \mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t_2)|^2 dx \leq C |t_1 - t_2|^{1/2}, \quad (46)$$



где константа  $C$  не зависит от  $h$  и  $\varepsilon$ .

□ Индекс  $h$  опускаем. Продифференцируем (38) по  $t$ , умножим на произвольную гладкую функцию  $\varphi$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Получим следующее интегральное тождество:

$$\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \chi D \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) : D(x, \varphi(\mathbf{x})) dx = I_2(t),$$

где

$$\begin{aligned} I_2(t) = & -\lambda_0 \int_{\Omega} (1 - \chi) D \left( x, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) : D(x, \varphi(\mathbf{x})) dx + \\ & + \int_{\Omega} \left( \delta \frac{\partial c}{\partial t} \mathbf{F} \cdot \varphi \right) dx + \int_{\Omega} \rho(c) \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \cdot \varphi(\mathbf{x}) \right) dx, \end{aligned}$$

которое справедливо для произвольной соленоидальной функции  $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ .

Выражение  $\partial c / \partial t$  выразим из уравнения (43) и поведем аналогичные рассуждения, что и в Лемме 1.

В силу оценок (32)-(33),  $I_2 \in L_2(0, T)$  и

$$\int_{t_1}^{t_2} |I_2(t)| dt \leq C |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{2,\Omega}.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \chi^\varepsilon \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) : \mathbb{D}(x, \varphi) dx \leq C |t_1 - t_2|^{1/2} \|\nabla \varphi\|_{2,\Omega},$$

где

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_2) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t_1).$$

В частности, для

$$\varphi = \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_2) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1), \quad \|\nabla \varphi\|_{2,\Omega} \leq C, \quad \forall t_1, t_2 \in (0, T),$$

имеем

$$\int_{\Omega} \chi \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) : \mathbb{D}(x, \tilde{\mathbf{v}}) dx \leq C |t_1 - t_2|^{1/2}.$$

Но, по определению продолжения  $\mathbf{v}$ ,

$$\chi D(x, \tilde{\mathbf{v}}) = \chi D \left( x, \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right).$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \chi D \left( x, \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) : D \left( x, \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) dx = \int_{\Omega} \chi D \left( x, \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) : D(x, \tilde{\mathbf{v}}) dx \leq C |t_1 - t_2|^{1/2}.$$

Применив к последнему неравенство Корна, получим оценку в утверждении леммы. ■



**Лемма 6.** *Решение  $(\mathbf{w}, p, c)$  исходной задачи (1) – (8) есть предел при  $h \rightarrow 0$  решений  $(\mathbf{u}_h, q_h, c_h)$  задачи (38) – (45).*

□ Умножим (38) на произвольную гладкую вектор-функцию  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , равную нулю на границе  $S$  и при  $t = T$ , и проинтегрируем по области  $\Omega_T$ .

$$\int_{\Omega_T} (\mu_0 \chi \mathbb{D}(x, \mathbf{v}_h) : \mathbb{D}(x, \varphi) + \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(x, \mathbf{u}_h) : \mathbb{D}(x, \varphi) - q_h \nabla \cdot \varphi) dx dt = \int_{\Omega_T} \rho(c_h) \mathbf{F} \cdot \varphi dx dt. \quad (47)$$

Пусть  $h \rightarrow 0$ . Легко видеть, что оценки (30) – (33) и (46) справедливы для всех  $h$ , с постоянными, не зависящими от  $h$  и  $\varepsilon$ .

Оценки (31), (32) и (33) позволяют из последовательностей  $\{\mathbf{u}_h\}$ ,  $\{q_h\}$  и  $\{c_h\}$  выбрать подпоследовательности такие, что

$$\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{w} \quad \text{слабо в} \quad W_2^{1,1}(\Omega_f \times (0, T)) \cap W_2^{1,0}(\Omega_s \times (0, T)),$$

$$q_h \rightharpoonup p \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$

$$c_h \rightharpoonup c \quad \text{слабо в} \quad W_2^{1,0}(\Omega_f \times (0, T)).$$

Переходя к пределу в неравенствах (30) – (33) и (46), получим требуемые в условии теоремы оценки.

В интегральном тождестве (47) предельный переход стандартный.

Аналогично поступим с уравнением (43), то есть умножим на произвольную гладкую функцию  $\psi(\mathbf{x}, t)$  равной нулю при  $t = T$  и проинтегрируем по цилиндру  $\Omega_f \times (0, T)$ :

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} \left( c_h \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla c_h \cdot \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_h) \psi - D_0 \nabla c_h \cdot \nabla \psi \right) dx dt = - \int_{\Omega_f} \mathbb{M}^{(h)}(c_0) \psi(\mathbf{x}, 0) dx. \quad (48)$$

Здесь есть сложность при предельном переходе  $h \rightarrow 0$ , только в одном слагаемом, а именно

$$\nabla c_h \cdot \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_h),$$

так как оба множителя сходятся лишь слабо.

Но легко показать, что последовательность  $\mathbf{v}_h$  при  $h \rightarrow 0$  сходится сильно в  $L(\Omega_T)$  к функции  $\mathbf{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial \mathbf{u} / \partial t)$ .

Действительно, зафиксируем счетное множество  $(t_{(k)})_{k=1}^\infty$  из отрезка и выберем подпоследовательность  $\{h > 0\}$  такую, что последовательность  $\{\nabla \mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t_{(k)})\}$  будет сходиться слабо в  $L_2(\Omega)$  при  $h \rightarrow 0$  для всех  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Это всегда возможно в силу оценки (32) и стандартного диагонального процесса. Последнее и оценка ((46)) обеспечивают слабую сходимости в  $L_2(\Omega)$  последовательности  $\nabla \mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t)$  для всех  $t \in (0, T)$ .



Используя компактное вложение пространства  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$  ([2]) имеем сильную сходимость  $\{\mathbf{v}_{(h)}(\mathbf{x}, t)\}$  в  $L_2(\Omega)$  для всех  $t \in (0, T)$ .

В остальных слагаемых интегрального тождества (48) предельный переход стандартен. ■

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

### Литература

1. Adams R.E. Sobolev spaces, Academic Press / New York, 1975.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / М.: Мир, 1972.
3. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type / Providence, Rhode Island, 1968.
4. Meirmanov A., Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media / Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – P.519-538.
5. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermoelastic porous media / Euro Journal of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259-284.
6. Meirmanov A., Zimin R. Mathematical models of a diffusion-convection in porous media // Electronic Journal of Differential Equations. – 2012.
7. Зимин Р.Н. О продолжении функций, заданных на периодических множествах // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – 17(88); 20. – С.65-73.

### CORRECTNESS OF DIFFUSION-CONVECTION MATHEMATICAL MODEL OF ADMIXTURE IN POROELASTIC MEDIA ON MICROSCOPIC LEVEL

A.M. Meirmanov, R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev

Belgorod State University,

Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: [Meirmanov@bsu.edu.ru](mailto:Meirmanov@bsu.edu.ru), [reshat85@mail.ru](mailto:reshat85@mail.ru)

**Abstract.** System describing the joint motion of incompressible viscous liquid and incompressible elastic skeleton is under consideration. Density of liquid depends on the admixture concentration. The system is completed with the diffusion-convection equation in the liquid domain. Existence of the weak solution of the initial-boundary problem for this system in the bounded domain is proved.

**Key words:** Stokes' and Lamé's system, diffusion-convection equation.



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

## О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В СЛАБО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ПОРОУПРУГОМ СКЕЛЕТЕ <sup>12)</sup>

И.В. Некрасова <sup>13)</sup>

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [Nekrasova\\_i@bsu.edu.ru](mailto:Nekrasova_i@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Предлагается вывод эволюционных уравнений для описания распределение давления в пласте вблизи нефтяной скважины в процессе гидравлического удара. Он основан на предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером схеме усреднения точной математической модели, описывающей на микроскопическом уровне совместное движение упругого твёрдого скелета и вязкой жидкости, которая заполняет поры.

**Ключевые слова:** уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

### Введение

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления в некоторых пространственных областях, заполненной жидкостью, например, таких, которые представляются трубами, трещинами и порами. Гидравлический удар в нефтяной скважине является частью процесса гидравлического разрыва нефтяного пласта. Существующие математические модели гидравлического удара являются либо упрощёнными инженерными моделями ([1], [2], [3]), косвенно связанными с фундаментальными законами механики сплошных сред, либо моделями, описывающими распространение трещин в упругой среде ([4]). Но эти модели не работают на более сложных системах, таких как нефтяная скважина. Это, в первую очередь, вызвано отсутствием достаточно простой физически корректной математической модели, описывающей это явление. Под физически корректной математической моделью будем понимать любую из основных моделей механики сплошных сред, либо модель асимптотически близкую к некоторой физически корректной феноменологической модели физического процесса на микроскопическом уровне ([5]).

В настоящей работе мы строим физически корректные математические модели гидравлического удара следуя очень естественной идее Р. Барриджа и Дж. Келлера [6], согласно которой, при описании гидравлического удара, необходимо, в первую очередь, описать физический процесс на микроскопическом уровне, опираясь на физически корректную математическую модель, затем, если модель содержит малый параметр, найти все предельные режимы (усреднённые уравнения) устремив малый параметр к нулю.

<sup>12</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613)

<sup>13</sup>Некрасова И.В., старший преподаватель Белгородского государственного университета



В качестве базовой математической модели гидравлического удара на микроскопическом уровне мы рассматриваем модель, описывающую кратковременные изотермические процессы в несжимаемой среде [7] – [9], где безразмерный вектор перемещений  $\mathbf{w}$  сплошной среды в безразмерных переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\mathbf{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области  $\Omega$  при  $t > 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (0.1)$$

$$\tilde{\varrho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \tilde{\varrho} \mathbf{F}, \quad (0.2)$$

$$\mathbb{P} = \tilde{\chi} \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) + (1 - \tilde{\chi}) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (0.3)$$

где

$$\tilde{\varrho} = \tilde{\chi} \varrho_f + (1 - \tilde{\chi}) \varrho_s,$$

$\tilde{\chi}(\mathbf{x})$  – характеристическая функция порового пространства,  $p(\mathbf{x}, t)$  – давление,  $\rho_f$  и  $\rho_s$  соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твёрдого скелета грунта, соотнесённые к средней плотности воды  $\rho_0$ ,  $\mathbb{I}$  – единичная матрица.

Безразмерные постоянные  $\alpha_\mu$  и  $\alpha_\lambda$  определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0},$$

где  $\mu$  – вязкость жидкости,  $\lambda$  – упругая постоянная Ламэ,  $\tau$  – характерное время физического процесса,  $L$  – характерный размер рассматриваемой физической области.

Уравнение (0.2) понимается в смысле теории распределений и содержит уравнения Стокса в жидкой части, уравнения Ламэ в твёрдом скелете и условие непрерывности нормальных напряжений на границе «твёрдый скелет – поровое пространство».

Эта математическая модель содержит естественный малый параметр  $\varepsilon$ , которым является отношение среднего размера пор  $l$  к характерному размеру  $L$ :  $\varepsilon = l/L$ . Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все её основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие допущения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

**Предположения.**

1). Пусть область  $Y_s$  есть «твёрдая часть» единичного куба  $Y = (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ , и его «жидкая» часть  $Y_f$  есть открытое дополнение  $Y_s$  в  $Y$  и граница  $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$  есть липшицева поверхность.



2). Область  $E_f$  есть периодическое повторение в  $\mathbb{R}^3$  элементарной ячейки  $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$ , область  $E_s$  есть периодическое повторение в  $\mathbb{R}^3$  элементарной ячейки  $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$ .

3). Поровое пространство  $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f$  есть периодическое повторение в  $\Omega$  элементарной ячейки  $\varepsilon Y_f$ , а твердый скелет  $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s$  есть периодическое повторение в  $\Omega$  элементарной ячейки  $\varepsilon Y_s$ . Непрерывная по Липшицу граница  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$  есть периодическое повторение в  $\Omega$  границы  $\varepsilon\gamma$ .

4).  $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$ . Поровое пространство  $\Omega_f^\varepsilon$  и твердый скелет  $\Omega_s^\varepsilon$  являются связными множествами.

В указанных предположениях

$$\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_0(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x}/\varepsilon),$$

где  $\chi_0(\mathbf{x})$  есть характеристическая функция области  $\Omega$ .

Пусть безразмерные параметры  $\alpha_\mu$  и  $\alpha_\lambda$  зависят от малого параметра задачи  $\varepsilon$  и существуют пределы (конечные или бесконечные):

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2} = \lambda_1.$$

Целью настоящей работы является нахождение предельных режимов (усреднённых уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий при

$$0 < \lambda_0 < \infty, \quad \mu_0 = 0$$

в следующих случаях:

- 1)  $\mu_1 = \infty$ ,
- 2)  $0 \leq \mu_1 < \infty$ .

Вывод полученных результатов основан на систематическом использовании метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом ([10]).

## 1. Постановка задачи

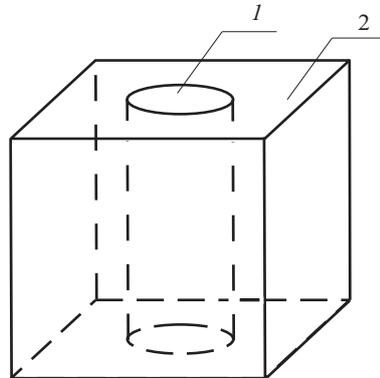
Как правило, начальный импульс, определяющий гидравлический удар, передаётся в нефтяной пласт через заполненный жидкостью резервуар. Моделируя этот процесс, мы рассматриваем в качестве области  $\Omega$  подобласть куба  $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x_i < 1, i = 1, 2, 3\}$ , такую что дополнение  $\Omega$  в  $Q$  есть цилиндр  $\bar{\Omega}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$  (см. рис. 1). Область  $\Omega^0$  и есть тот резервуар, через который в область  $\Omega$  передаётся начальный импульс.

Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, в области  $\Omega_T$  описывается системой

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \tag{1.1}$$

$$\varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}. \tag{1.3}$$

Рис. 1. 1 – область  $\Omega^0$ , 2 – область  $\Omega$ 

В области  $\Omega_T^0$  движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (1.1) и уравнения баланса импульса

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^0, \quad (1.4)$$

$$\mathbb{P}^0 = \alpha_\mu \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) - p^\varepsilon \mathbb{I}. \quad (1.5)$$

На общей границе  $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$  выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \quad (1.7)$$

для  $(\mathbf{x}^0, t) \in S_T^0 = S^0 \times (0, T)$ .

Сформулируем граничные условия на  $S = \partial Q$ . На верхнем основании  $S^1 = \{x_3 = 1\} \cap \partial\Omega^0$  цилиндра  $\Omega_0$  задано нормальное напряжение

$$\mathbb{P}^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3 = p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_3, \quad (1.8)$$

где  $p_0(\mathbf{x}, t)$  есть импульс, определяющий гидравлический удар.

Будем считать, что функция  $p_0(\mathbf{x}, t) = p_0(x_1, x_2, t)$  финитна в области

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < \delta^2 < 1\}.$$

На оставшейся части внешней границы  $S^2 = S \setminus S^1$

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in S_T^2 = S^2 \times (0, T). \quad (1.9)$$



Формулировка модели завершается посредством введения однородных начальных условий

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.10)$$

Обычным образом определяется понятие обобщённого решения задачи (1.1) – (1.10).

**Определение 1.** Пара функций  $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ , таких что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in W_2^{1,1}(\Omega_T), \quad p^\varepsilon \in L_2(\Omega_T),$$

называется обобщённым решением задачи (1.1) – (1.10), если данные функции удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в  $Q_T$ , граничному условию (1.8), начальному условию (1.10) для функции  $\mathbf{w}^\varepsilon$ , и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left( -\tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + (\zeta \mathbb{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbb{P}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) \right) dxdt = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} p_0) dxdt \quad (1.11)$$

для всех функций  $\boldsymbol{\varphi} \in W_2^{1,1}(Q_T)$ , таких что  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = 0$  на границе  $S_T^2$ , и  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, T) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in Q$ .

В уравнении (1.11)  $\tilde{\varrho}^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\varrho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)\varrho_s$  и  $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$  есть характеристическая функция области  $\Omega^0$  в  $Q$ . Через  $A : B$  обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е.  $A : B = \text{tr}(A \circ B^*) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$ .

Тождество (1.11) мы будем иногда записывать в дифференциальной форме

$$\tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\zeta \mathbb{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbb{P}), \quad (1.12)$$

и говорить, что функции  $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$  удовлетворяют уравнению (1.12) и граничному условию (1.8) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция  $p_0$  подчинена следующему условию

$$\int_{Q_T} \left( |\nabla p_0(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \nabla \frac{\partial p_0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dxdt = \mathfrak{P}^2 < \infty,$$

где  $\mathfrak{P}$  – константа, зависящая только от областей  $Q$ ,  $\Omega$  и  $\Omega_0$ .

Для формулировки нижеследующих утверждений мы нуждаемся в дополнительной конструкции. А именно, пусть  $Q_f^\varepsilon = Q \setminus \bar{\Omega}_s^\varepsilon$  и

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon),$$

где

$$\mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : W_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \rightarrow W_2^1(\Omega)$$

есть оператор продолжения из  $\Omega_s^\varepsilon$  на  $\Omega$ , так что

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_s^\varepsilon \times (0, T),$$



и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx &\leq C_0 \int_{\Omega_s^\varepsilon} |\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx \\ \int_{\Omega} |\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)|^2 dx &\leq C_0 \int_{\Omega_s^\varepsilon} |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

(более подробно о таком продолжении см. работу [11]).

Вывод усреднённых уравнений базируется на следующей теореме.

**Теорема 1.** При всех  $\varepsilon > 0$  на произвольном интервале времени  $[0, T]$  существует единственное обобщённое решение задачи (1.1) – (1.10) и

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_Q \left( \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + |p^\varepsilon|^2 + \alpha_\mu (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \alpha_\lambda (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \right) dx \leq C_0 \mathfrak{P}^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где постоянная  $C_0$  не зависит от малого параметра  $\varepsilon$ .

Доказательство существования обобщённого решения задачи (1.1) – (1.10) при всех  $\varepsilon > 0$  и оценки (1.13) стандартно (см. [5], [8]) и базируется на энергетическом тождестве

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Q \left( \tilde{\varrho}^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + \alpha_\lambda (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \right) dx + \\ + \int_Q \alpha_\mu (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx = \int_Q \nabla \left( \frac{\partial p_0}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx, \end{aligned}$$

которое получится после дифференцирования уравнения (1.12) по времени, умножения на  $\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2$  и интегрирования по частям по области  $Q$ .

Давление  $p^\varepsilon$  оценивается из интегрального тождества (1.11) как линейный непрерывный функционал над пространством функций  $L_2((0, T); W_2^1(Q))$ .

## 2. Формулировка основных результатов

**Теорема 2.** Пусть  $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$  – слабое решение задачи (1.1) – (1.10),

$$\mu_1 = \infty,$$

и  $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ . Тогда

1) последовательность  $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$  сходится слабо в  $W_2^{1,0}(\Omega_T)$  к функции  $\mathbf{u}$ , последовательности  $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$  и  $\{p^\varepsilon\}$  сходятся слабо в  $L_2(Q_T)$  к функциям  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$  и  $p$  соответственно, и

$$(1 - \zeta) \left( \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0; \quad (2.1)$$



2) предельные функции  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $p$  есть решение системы усредненных уравнений в области  $Q_T$ , состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

и усредненного уравнения баланса импульса

$$\varrho_f \zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{\varrho} (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\lambda_0 (1 - \zeta) \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - p \mathbb{I}), \quad (2.3)$$

совместно с краевыми и начальными условиями

$$p(\mathbf{x}, t) = -p_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S^1, \quad t \in (0, T), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S^2, \quad t \in (0, T), \quad (2.5)$$

$$\zeta \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = (1 - \zeta) \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad (2.6)$$

3) задача (2.2) – (2.6) имеет единственное решение.

В (2.3)

$$\hat{\varrho} = m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s,$$

симметричный строго положительно определённый постоянный тензор четвертого ранга  $\mathfrak{N}_0^s$  определён ниже формулой (3.17).

**Теорема 3.** Пусть  $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$  – слабое решение задачи (1.1) – (1.10),

$$0 \leq \mu_1 < \infty,$$

и  $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ . Тогда

1) последовательность  $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$  сходится слабо в  $W_2^{1,0}(Q_T)$  к функции  $\mathbf{u}$ , последовательности  $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$ ,  $\{p^\varepsilon\}$  и  $\{p_f^\varepsilon\}$ , где

$$\mathbf{w}_f^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) \mathbf{w}^\varepsilon, \quad p_f^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) p^\varepsilon,$$

сходятся слабо в  $L_2(Q_T)$  к функциям  $\mathbf{w}_f$ ,  $p$  и  $p_f$  соответственно;

2) предельные функции  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}_f$  и  $p_f$  есть решение системы усредненных уравнений в области  $Q_T$ , состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot (\mathbf{w}_f + (1 - \zeta) \mathbf{u}) = 0, \quad (2.7)$$

усредненного уравнения баланса импульса

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2} + \varrho_s (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left( \lambda_0 (1 - \zeta) \mathfrak{N}_1^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \left( \zeta p + \frac{(1 - \zeta)}{m} p_f \right) \mathbb{I} \right) \quad (2.8)$$

для твердой компоненты и усредненного уравнения баланса импульса

$$(1 - \zeta) \left( \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) =$$



$$-(1 - \zeta) \int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t - \tau) \cdot \left( \frac{1}{m} \nabla p_f(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau \quad (2.9)$$

для жидкой компоненты, совместно с краевыми и начальными условиями (2.4) – (2.6) для твердой компоненты и условиями

$$\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S^2, \quad t \in (0, T), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{w}_f(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q \quad (2.11)$$

для жидкой компоненты.

В уравнениях (2.8) – (2.10) симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга  $\mathfrak{N}_1^s$  и матрицы  $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t)$ ,  $\mathbb{B}^{(f)}(0, \infty)$  определены ниже формулами (3.21), (3.30) и (3.35),  $\mathbf{n}$  – нормальный вектор к границе  $S^2$ .

### 3. Доказательство теорем

**Доказательство теоремы 2.** На основании теоремы 1 и свойств оператора  $\mathbb{E}_{\Omega_\varepsilon}$  заключаем, что последовательности  $\{p^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbf{u}^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)\}$ ,  $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t)\}$ ,  $\{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}$  и  $\{\sqrt{\alpha_\mu} \nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$  ограничены в  $L_2(Q_T)$ . Следовательно существует подпоследовательность, зависящая от малого параметра  $\{\varepsilon > 0\}$  и функции  $p$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$ , такие что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p, \quad \mathbf{v}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

слабо в  $L_2(Q_T)$  при  $\varepsilon \searrow 0$ , и

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

слабо в  $W_2^{1,0}(\Omega_T)$  при  $\varepsilon \searrow 0$ .

В дополнение к сказанному заметим, что

$$\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

сильно в  $L_2(Q_T)$  при  $\varepsilon \searrow 0$ .

Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

По теореме Нгуэтсенга существуют 1-периодические по  $\mathbf{y}$  функции  $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  из  $L_2(Q_T \times Y)$  и  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  из  $L_2(\Omega_T; W_2^1(Y))$ , такие что последовательности  $\{p^\varepsilon\}$ ,  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbf{u}^\varepsilon\}$ ,  $\{\varepsilon \nabla \mathbf{v}^\varepsilon\}$  и  $\{(1 - \zeta)\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\}$  сходятся двухмасштабно в  $L_2(Q_T)$  к  $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $(1 - \zeta)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\nabla_y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  и  $(1 - \zeta)(\nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_y \mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))$  соответственно.

**Лемма 1.** Пусть последовательность  $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$  сходится двухмасштабно в  $L_2(Q_T)$  при  $\varepsilon \searrow 0$  к функции  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ , последовательность  $\{\beta(\varepsilon)\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\}$  ограничена в  $L_2(Q_T)$  и

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty.$$



Тогда

$$U(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

□ Пусть  $\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  – произвольная гладкая скалярная периодическая по переменной  $\mathbf{y}$  и финитная в  $Y$  функция.

Последовательность  $\{\sigma_{ij}^\varepsilon\}$ , где

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \int_{Q_T} \beta(\varepsilon) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \Psi\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dxdt, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon),$$

равномерно ограничена по  $\varepsilon$ . Следовательно,

$$\int_{Q_T} \varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \Psi\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dxdt = \frac{\varepsilon}{\beta(\varepsilon)} \sigma_{ij}^\varepsilon \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \searrow 0$ , что эквивалентно следующему

$$\int_{Q_T} \int_Y U_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dydxdt = 0, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3),$$

или  $U(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . ■

**Лемма 2.** Предельные функции  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{U}$  удовлетворяют макроскопическому и микроскопическому уравнениям неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{3.2}$$

$$(1 - \chi(\mathbf{y}))(\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{U}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad \mathbf{y} \in Y, \tag{3.3}$$

и

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad \mathbf{W} = \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) d\tau, \tag{3.4}$$

где

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = (\zeta + \chi(\mathbf{y})(1 - \zeta))\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + (1 - \zeta)(1 - \chi(\mathbf{y})) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \tag{3.5}$$

и

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{V} \rangle_Y = \zeta \mathbf{v} + (1 - \zeta) \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f} + (1 - \zeta)(1 - m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \tag{3.6}$$

□ Для доказательства (3.2) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности в виде

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) dxdt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой функции  $\varphi$ , равной нулю на части  $S_T^1$  границы  $\partial Q$  и перейти к пределу при  $\varepsilon \searrow 0$ .

Уравнение (3.3) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$(1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0$$



для  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$ .

Уравнение (3.4) получим, перейдя к двухмасштабному пределу в уравнении неразрывности (1.1) в интегральной форме

$$\int_{Q_T} \varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla (h_0(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}/\varepsilon)) dx dt = 0.$$

Наконец, соотношение (3.5) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$\mathbf{v}^\varepsilon = (\zeta + \chi^\varepsilon(1 - \zeta)) \mathbf{v}^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon)(1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}. \quad \blacksquare$$

**Лемма 3.** Для почти всех  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$  и  $\mathbf{y} \in Y$  слабые и двухмасштабные пределы последовательностей  $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$  и  $\{(1 - \chi^\varepsilon) p^\varepsilon\}$  удовлетворяют соотношению

$$(1 - \zeta) P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = (1 - \zeta) (P_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \frac{1}{m} \chi(\mathbf{y}) p_f(\mathbf{x}, t)), \quad (3.7)$$

где  $P_s = (1 - \chi(\mathbf{y})) P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ .

□ В интегральное тождество (1.11) подставим пробную функцию вида  $\varphi = \varepsilon \varphi_0(\mathbf{x}, t) \varphi_1(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , где  $\varphi_1(\mathbf{y})$  – произвольная 1-периодическая финитная в области  $Y_f$  функция от  $\mathbf{y}$ . Переходя к пределу при  $\varepsilon \searrow 0$ , мы получим

$$\nabla_{\mathbf{y}} P_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \quad (3.8)$$

Из чего следует

$$P_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{m} \chi(\mathbf{y}) p_f(\mathbf{x}, t).$$

Последнее, с учетом равенства

$$P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = P_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + P_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \in \Omega_T \times Y,$$

доказывает (3.7). ■

**Лемма 4.** Предельные функции  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{U}$  и  $P$  удовлетворяют макроскопическому уравнению баланса импульса

$$\begin{aligned} \varrho_f \left( \zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (1 - \zeta) \frac{\partial \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f}}{\partial t} \right) + \varrho_s (1 - m) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \\ \nabla \cdot \left( \lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

в области  $Q_T$ , краевому условию (2.4), начальному условию (2.6) для функции  $\mathbf{v}$  и микроскопическому уравнению баланса импульса

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( (1 - \chi) \lambda_0 (\mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + \mathbb{D}(y, \mathbf{U})) - \left( P_s + \frac{\chi}{m} p_f \right) \mathbb{I} \right) = 0 \quad (3.10)$$



в области  $Y$  для почти всех  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$ .

□ Уравнение (3.9) следует из (1.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями вида  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ :

$$\int_{Q_T} \left( - \left( \varrho_f (\zeta \mathbf{v} + (1 - \zeta) \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f}) + \varrho_s (1 - m) (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \right. \\ \left. + (\lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \varphi) \right) dxdt = \\ \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dxdt. \quad (3.11)$$

Последнее интегральное тождество, записанное в следующем виде

$$\int_{Q_T} \left( \varrho_f \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \nabla \cdot \varphi + \nabla \cdot (\varphi p_0) \right) dxdt = 0$$

для финитных в области  $\Omega_0$  функций  $\varphi$ , обеспечивает краевое условие (2.4), начальное условие (2.6) для функций  $\mathbf{v}$  и оценку

$$\int_{Q_T} \zeta |\nabla p(\mathbf{x}, t)|^2 dxdt \leq C_0 \mathfrak{P}^2. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.10) следует из (1.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями вида  $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , где  $h$  есть финитная в  $\Omega$  функция. ■

Лемма 1 и ограниченность последовательности  $\{\sqrt{\alpha_\mu} \nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$  в  $L_2(Q_T)$  влекут равенство

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.13)$$

Применяя двухмасштабный предельный переход в равенстве

$$(1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon) \left( \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) = 0,$$

получим (2.1). Следовательно функция  $\mathbf{v}$  удовлетворяет уравнению неразрывности (2.2) и уравнению неразрывности (3.3) в следующем виде

$$(1 - \chi(\mathbf{y})) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad (3.14)$$

в то время как макроскопическое уравнение баланса импульса (3.11) обретает вид

$$\int_{Q_T} \left( - \left( \varrho_f \zeta \mathbf{v} + \hat{\varrho} (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \right. \\ \left. (\lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \varphi) \right) dxdt = \\ \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dxdt,$$



что эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varrho_f \zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{\varrho}(1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left( \lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I} \right) \quad (3.15)$$

и начальному условию (2.6) для функции  $\mathbf{u}$ .

**Лемма 5.** *Предельные функции  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $p$  удовлетворяют в области  $Q_T$  усреднённому уравнению баланса импульса (2.3).*

□ Усредненное уравнение (2.3) следует из макроскопического уравнения (3.15), после подстановки в него выражения

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s} = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - (1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (3.10) и (3.14) на элементарной ячейке  $Y_s$ . Действительно, полагая

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{U}^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

$$P_s - \frac{1}{m} p_f = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \right), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{x}, t) \mathbb{J}^{ij},$$

получим следующую периодическую краевую задачу на  $Y$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( (1 - \chi) (\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} - P^{(ij)} \mathbb{I}) \right) &= 0, \quad \mathbf{y} \in Y, \\ (1 - \chi) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{U}^{(ij)} &= 0, \quad \langle \mathbf{U}^{(ij)} \rangle_{Y_s} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Тогда

$$\mathfrak{N}_0^s = (1 - m) \mathbb{J} + \sum_{i,j=1}^3 \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \quad (3.17)$$

где

$$\mathbb{J} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \quad \mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i).$$

Симметричность тензора  $\mathfrak{N}_0^s$  следует из равенства

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) \rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{kl} = - \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(kl)}) \rangle_{Y_s} \quad (3.18)$$



которое, в свою очередь, является результатом умножения уравнения (3.16) для функции  $\mathbf{U}^{(ij)}$  на  $\mathbf{U}^{(kl)}$  и интегрирования по частям. Это же равенство доставляет положительную определенность тензора  $\mathfrak{N}_0^s$ .

Единственность решения задачи (2.2) – (2.6) следует из энергетического тождества

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Q \left( (1 - \zeta) \lambda_0(\mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u})) : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + \varrho_f \zeta |\mathbf{v}|^2 + \hat{\varrho}(1 - \zeta) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 \right) dx = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dx dt$$

для решения  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  усредненной задачи и свойств тензора  $\mathfrak{N}_0^s$ . Последнее тождество есть результат умножения уравнения (2.3) на  $\mathbf{v}$  и интегрирования по частям по области  $Q$  с учетом (2.1). Наконец, функция  $\mathbf{u}$  исчезает на границе  $S_T^2$  в силу справедливости нижеследующего утверждения, которое приведем без доказательства. ■

**Лемма 6.** Пусть функции

$$\mathbf{v}^\varepsilon \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$$

и  $\mathbf{v}^\varepsilon = 0$  на части  $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_s^\varepsilon \subset S_s^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega$  границы  $S = \partial\Omega$ , последовательность  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$  сходится слабо в  $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$  к функции  $\mathbf{v}$ .

Тогда  $\mathbf{v} = 0$  на части  $S_0$  границы  $S$ . То есть

$$\int_0^T \int_{S_0} |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{n}, t)| d\sigma dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к границе  $S$  в точке  $\mathbf{x}$ .

**Доказательство теоремы 3.**

Случай  $\mu_1 > 0$ . Как и в предыдущем параграфе мы утверждаем, что последовательности  $\{p^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbf{u}^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)\}$ ,  $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t\}$ ,  $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t)\}$ ,  $\{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}$  и  $\{\sqrt{\alpha_\mu} \nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$  ограничены в  $L_2(Q_T)$ . Следовательно существуют подпоследовательности от малого параметра  $\{\varepsilon > 0\}$  и функции  $p$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , такие что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p, \quad \mathbf{v}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

слабо в  $L_2(Q_T)$  при  $\varepsilon \searrow 0$ , и

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

слабо в  $W_2^{1,0}(Q_T)$  и  $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ .

Заметим также, что

$$\alpha_\mu(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \rightarrow 0 \tag{3.19}$$

сильно в  $L_2(Q_T)$  при  $\varepsilon \searrow 0$ .

В то же время существуют 1-периодические по  $\mathbf{y}$  функции  $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  из  $L_2(Q_T \times Y)$  и  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  из  $L_2(Q_T; W_2^1(Y))$ , такие что последовательности  $\{p^\varepsilon\}$ ,  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 -$



$\zeta \mathbf{u}^\varepsilon$ ,  $\{\varepsilon \nabla \mathbf{v}^\varepsilon\}$  и  $\{(1 - \zeta) \nabla \mathbf{u}^\varepsilon\}$  сходятся двухмасштабно  $L_2(Q_T)$  к функциям  $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ ,  $(1 - \zeta) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\nabla_y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  и  $(1 - \zeta)(\nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_y \mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))$  соответственно.

Для всех этих функций верны утверждения лемм 2 - 4.

Чтобы получить усредненное уравнение баланса импульса (2.8), необходимо записать выражения для  $\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$  и  $p$  как операторы на  $\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  и  $(\nabla_x \cdot \mathbf{u})$ , используя систему (3.3) (3.10), и подставить в уравнение (3.9).

Полагая

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{U}^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}_0(\mathbf{y}) (\nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)),$$

$$P_s - \frac{1}{m} p_f = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t) + \lambda_0 P_0(\mathbf{y}) (\nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)),$$

получим следующую периодическую краевую задачу на  $Y$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla_y \cdot \left( (1 - \chi) (\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) - P_0 \mathbb{I}) \right) &= 0, \\ (1 - \chi) (\nabla_y \cdot \mathbf{U}_0 + 1) &= 0, \quad \langle \mathbf{U}_0 \rangle_{Y_s} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Тогда

$$\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) = \left( \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) \otimes \mathbb{J}^{ij} + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \otimes \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$p = \frac{1}{m} p_f + \lambda_0 \left( \left\langle \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)} \right\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \langle P_0 \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \subset \Omega_T \times Y$$

и

$$\mathfrak{N}_1^s = \mathfrak{N}_0^s + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{I} + \left\langle \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)} \right\rangle_{Y_s} \mathbb{I} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \langle P_0 \rangle_{Y_s} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (3.21)$$

Симметричность и строгая положительная определенность тензора  $\mathfrak{N}_1^s$  следуют из равенств

$$\langle P_0 \rangle_{Y_s} = -\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \rangle_{Y_s}, \quad (3.22)$$

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \rangle_{Y_s} = 0, \quad (3.23)$$

$$\langle P^{(ij)} \rangle_{Y_s} = -\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) : \mathbb{J}^{ij} \rangle_{Y_s}, \quad (3.24)$$

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(kl)}) \rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(kl)}) \rangle_{Y_s} = 0, \quad (3.25)$$

для всех  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Равенства (3.22) и (3.23) есть результат умножения уравнения для  $\mathbf{U}_0$  на  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{U}^{(ij)}$  соответственно и интегрирования по частям по области  $Y$ . Соотношения (3.24) и (3.25) получим, умножив уравнения для  $\mathbf{U}^{(ij)}$  на  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{U}^{(kl)}$  соответственно, интегрируя по частям по области  $Y$  с использованием (3.23).

Следовательно функции  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}_f$  и  $p_f$ , где

$$\mathbf{w}_f = \zeta \mathbf{w} + (1 - \zeta) \langle \mathbf{W} \rangle_{Y_f},$$



удовлетворяют уравнению неразрывности (2.7), усредненному уравнению баланса импульса (2.8) и краевым условиям (2.4) и (2.10).

Краевое условие (2.10) очевидным образом следует из уравнения неразрывности (3.2) и условия (2.5). Справедливость условия (2.4) показана в лемме 4.

Легко видеть, что последовательность  $\{(\zeta + \chi^\varepsilon(1 - \zeta))\mathbf{v}^\varepsilon\}$  сходится двухмасштабно в  $L_2(Q_T)$  к функции  $\mathbf{V}_f = \partial \mathbf{W}_f / \partial t = (\zeta + (1 - \zeta)\chi(\mathbf{y}))\mathbf{V}$  и слабо в  $L_2(Q_T)$  к функции  $\mathbf{v}_f = \partial \mathbf{w}_f / \partial t = \zeta \mathbf{v} + (1 - \zeta)\langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f}$ .

Чтобы получить усредненное уравнение баланса импульса (2.8) для твердой компоненты, перейдем к пределу в тождестве (1.11) при  $\varepsilon \searrow 0$  с пробными функциями вида  $\varphi = h(\mathbf{x}, t)\varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , где  $h(\mathbf{x}, t)$  есть финитная в области  $\Omega$  функция для всех  $t \in (0, T)$ , а  $\varphi_0(\mathbf{y})$  – 1-периодическая гладкая финитная в  $Y_f$  соленоидальная функция.

В результате имеем для функции  $\mathbf{W}_f$  микроскопическое уравнение баланса импульса

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_f}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left( \mu_1 \nabla_{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial \mathbf{W}_f}{\partial t} \right) - \Pi^{(f)} \mathbb{I} \right) - \frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}} p_f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad t \in (0, T) \quad (3.26)$$

начальные условия

$$\mathbf{W}_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{W}_f}{\partial t}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (3.27)$$

для почти всех  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$ .

Дополним систему (3.26) – (3.27) уравнением неразрывности (3.4) и краевым условием

$$\mathbf{W}_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad (3.28)$$

которое является следствием соотношения (3.5) и условия регулярности  $\mathbf{V} \in L_2(Q_T; W_2^1(Y))$ .

Решение вышеприведенной системы будем искать в следующем виде

$$\mathbf{W}_f = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, t - \tau) z_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

$$\Pi^{(f)} = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y}, t - \tau) z_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

где

$$\mathbf{z} = \frac{1}{m} \nabla p_f(\mathbf{x}, t) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^3 z_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i.$$

Тогда периодические по переменной  $\mathbf{y}$  функции  $\mathbf{W}_i^{(f)}$ ,  $\Pi_i^{(f)}$  при  $i = 1, 2, 3$  есть решения



следующих периодических начально-краевых задач

$$\left. \begin{aligned} \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2} &= \mu_1 \Delta_y \left( \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t} \right) - \nabla_y \Pi_i^{(f)}, \quad (\mathbf{y}, t) \in Y_f \times (0, T), \\ \nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(f)} &= 0, \quad (\mathbf{y}, t) \in Y_f \times (0, T), \\ \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, t) &= 0, \quad (\mathbf{y}, t) \in \gamma \times (0, T), \\ \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, 0) &= 0, \quad \varrho_f \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = -\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Корректность задач (3.29) следует из энергетических равенств

$$\frac{1}{2} \int_{Y_f} \varrho_f \left| \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \right|^2 d\mathbf{y} + \mu_1 \int_0^t \int_{Y_f} |\nabla_y \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, \tau)|^2 d\mathbf{y} d\tau = \frac{m}{2\varrho_f}.$$

Заметим, что задачи (3.29) для соленоидальных функций  $\mathbf{W}_i^{(f)}$ , исчезающих на  $\gamma$  и при  $t = 0$ , следует понимать как интегральные тождества

$$\int_0^T \int_{Y_f} \left( \varrho_f \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_1 \nabla_y \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t} : \nabla_y \varphi \right) dy dt = - \int_{Y_f} \mathbf{e}_i \cdot \varphi(\mathbf{y}, 0) dy$$

для соленоидальных 1-периодических функций  $\varphi$ , исчезающих на  $\gamma$  и при  $t = T$ .

По определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &+ \int_0^t \left( \sum_{i=1}^3 \left( \int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{y} \right) \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \\ m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &+ \int_0^t \mathbb{B}^f(\mu_1, \infty; t - \tau) \cdot \left( \frac{1}{m} \nabla p_f(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{B}^f(\mu_1, \infty; t) = \sum_{i=1}^3 \left( \int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \right) \otimes \mathbf{e}_i, \quad (3.30)$$

Случай  $\mu_1 = 0$ . Для этого случая верны все те же рассуждения, что и при  $\mu_1 > 0$ , исключая следующее:

1) двухмасштабную сходимость последовательности  $\{\varepsilon \nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$  к функции  $\nabla \mathbf{W} \in L_2(Q_T \times Y)$ ,

2) вывод уравнения баланса импульса для жидкой компоненты.

При  $\mu_1 = 0$  микроскопическое уравнение баланса импульса для жидкой компоненты приобретает вид

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_f}{\partial t^2} = -\nabla_y \Pi^{(f)} - \frac{1}{m} \nabla_x p_f. \quad (3.31)$$



Вместо условия (3.28) на границе  $\gamma$  имеем условие

$$(\mathbf{W}_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = 0, \quad (3.32)$$

которое является следствием микроскопического уравнения неразрывности (3.4) и представления

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (1 - \chi(\mathbf{y}))\mathbf{W}_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Чтобы решить (3.31), подействуем на это уравнение оператором  $\nabla_y \cdot$  и снова воспользуемся (3.4):

$$0 = \nabla_y \cdot \left( \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_f}{\partial t^2} \right) = -\nabla_y \cdot (\nabla_y \Pi^{(f)}). \quad (3.33)$$

Граничное условие (3.32) и уравнение (3.31) доставляют краевое условие на  $\gamma$  для давления  $\Pi^{(f)}$ :

$$\nabla_y \Pi^{(f)} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = -\left( \frac{1}{m} \nabla_x p_f + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}). \quad (3.34)$$

Используя представление

$$\Pi^{(f)} = -\left( \sum_{i=1}^3 \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \frac{1}{m} \nabla_x p_f + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right),$$

где  $\Pi_i^{(f)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , есть решения периодических краевых задач

$$\Delta_y \Pi_i^{(f)} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (\nabla_y \Pi_i^{(f)} - \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma,$$

мы получим

$$\nabla_y \Pi^{(f)} = -\left( \sum_{i=1}^3 \nabla_y \Pi_i^{(f)} \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \frac{1}{m} \nabla_x p_f + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right).$$

Интегрируя уравнение (3.31) по области  $Y_f$ , получим желаемое уравнение баланса импульса (2.9) для жидкой компоненты, если положим

$$\varrho_f \mathbb{B}^{(f)}(\infty, 0) = \mathbb{I} - \left( \sum_{i=1}^3 \int_{Y_f} \nabla_y \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \otimes \mathbf{e}_i \right). \quad (3.35)$$

### Литература

1. Adachi J.I., Detournay E., Peirce A.P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2010. – 47. – P.625-630.
2. Kovalyshen Y., Detournay E. A Reexamination of the Classical PKN Model of Hydraulic Fracture // Transp. Porous Med. – 2010. – 81. – P.317-339.



3. Weiguob L., Yangshenga Z. A mathematical model for solid liquid and mass transfer coupling and numerical simulation for hydraulic fracture in rock salt // *Progress in Natural Science*. – 2005. – 15;8. – P.742-748.
4. Гарипов Т.Т. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в поропругой среде // *Мат. Моделирование*. – 2006. – 18;6. – С.53-69.
5. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2010. – 20;4. – P.635-659.
6. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // *Journal of Acoustic Society of America*. – 1981. – 70;4. – P.1140-1146.
7. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // *Сиб. Мат. Журнал*. – 2007. – 48;3. – С.645-667.
8. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* – 2008. – 40;3. – P.1272-1289.
9. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – 163;2. – P.111-172.
10. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* – 1989. – 20;3. – P.608-623.
11. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // *J. math. pures et appl.* – 1985. – 64. – P.31-75.

**ABOUT CORRECTNESS OF MATHEMATICAL MODELS  
OF HYDRAULIC SHOCK IN SLIGHTLY VISCOUS LIQUID  
AND ELASTIC SOLID SKELETON**

**I.V. Nekrasova**

Belgorod State University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [Nekrasova\\_i@bsu.edu.ru](mailto:Nekrasova_i@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Derivation of evolution equations for description of pressure distribution near the well during the hydraulic shock is proposed. It is based upon the scheme suggested by J. Keller and R. Burridge. The scheme is connected with the averaging of exact microscopic mathematical model describing the joint evolution of an elastic solid skeleton and a viscous fluid filling the pores.

**Key words:** Stokes' equations, hydraulic fracturing, two-scale convergence, averaging of periodic structures.



УДК 517.91

## ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАТОРОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДИСКРЕТНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ <sup>14)</sup>

Е.В. Радкевич <sup>15)</sup>

Московский государственный университет,  
Ленинские горы, 1, В-899, Москва, 119899, Россия, e-mail: [evrad07@gmail.com](mailto:evrad07@gmail.com)

**Аннотация.** Для дискретных уравнений кинетики доказано существование глобального решения, получено разложение его по гладкости, исследовано влияние осцилляций, порождаемых оператором взаимодействия.

**Ключевые слова:** кинетическое уравнение, оператор взаимодействия, глобальное решение.

### 1. Введение

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа хаотически движущихся частиц тем или иным образом взаимодействующих между собой. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсами и энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения частиц или при помощи тех или иных сил. Для пояснения математической схемы, описывающей подобные явления, в [1] рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана и приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом разных взаимодействий (модели типа Бродуэлла [2])

$$\partial_t n_i + (\omega_{ix} \partial_x + \omega_{iy} \partial_y + \omega_{iz} \partial_z) n_i = \sum_{k,l,j;k \neq i, l \neq i, j \neq i} \sigma_{kl}^{ij} (n_k n_l - n_i n_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Потребуем справедливости так называемого закона детального равновесия

$$\sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{ij}^{kl},$$

который обычно имеет место для реальных систем. Более того, для любых  $\varphi_i$  имеет место

$$\begin{aligned} \partial_t (\varphi_i n_i) + (\omega_{ix} \partial_x + \omega_{iy} \partial_y + \omega_{iz} \partial_z) (\varphi_i n_i) = \\ = \sum_{k,l,j;k \neq i, l \neq i, j \neq i} \sigma_{kl}^{ij} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_l - \varphi_k) (n_k n_l - n_i n_j). \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>14</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N: 09-01-12024), (грант N: 09-01-00288) и (грант N:11-01-12082-офи<sub>М</sub>)

<sup>15</sup>Радкевич Е.В., д. физ.- мат. наук, профессор Московского государственного университета



Отсюда следует, что  $n_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n_N$ , если начальные условия  $n_i^0 > 0$ ,  $i = 1, \dots, n_N$ .

Для  $\varphi_j \equiv 1$  имеет место уравнение неразрывности

$$\partial_t \left( \sum_{j=1}^N n_j \right) + \partial_x \left( \sum_{j=1}^N (\omega_{jx} \partial_x + \omega_{jy} \partial_y + \omega_{jz} \partial_z) n_j \right) = 0$$

для  $\varphi_j = \ln n_j$  имеет место H-теорема Больцмана

$$\partial_t (n_i \ln n_i) + (\omega_{ix} \partial_x + \omega_{iy} \partial_y + \omega_{iz} \partial_z) (n_i \ln n_i) = \sum_{k,l,j;k \neq i, l \neq i, j \neq i} \sigma_{kl}^{ij} \ln \left( \frac{n_i n_j}{n_l n_k} \right) (n_k n_l - n_i n_j) \dots \quad (3)$$

Для того чтобы выполнялись другие законы сохранения, *надо накладывать на законы столкновения частиц* дополнительные условия, чтобы существовали такие  $\varphi_j$ , при которых правая часть уравнения (3) обращалась бы в нуль. Способ выбора дискретных скоростей, обеспечивающих описание течения газа с законами сохранения трех компонент импульса и с сохранением энергии в общем случае не разработан. Это связано с трудностями комбинаторно-геометрического характера [1].

Для кинетического уравнения Больцмана широко дискутируются две проблемы:

1. Необратимость (во времени);
2. Исследование структуры аттрактора.

Вторая проблема связана с исследованием сложной размерности аттрактора через описание составляющих его разноразмерных податтракторов. Но, кинетическое уравнение Больцмана чрезвычайно сложно в исследовании. Дискретные кинетические уравнения, обладающие основными свойствами кинетического уравнения Больцмана, позволяют понять природу этих проблем.

В этой статье мы рассмотрим задачу Коши для одномерной модели типа Бродуэлла (см. [1]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon} (v^2 - uw), \quad (4)$$

$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon} (v^2 - uw),$$

$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon} (v^2 - uw),$$

$$v(0) = v^0, \quad u(0) = u^0, \quad w(0) = w^0, \quad (5)$$

и ее модификацию (комплексификацию):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon} [v\bar{v} - \frac{1}{2}(u\bar{w} + w\bar{u})], \quad (6)$$

$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon} [v\bar{v} - \frac{1}{2}(u\bar{w} + w\bar{u})],$$

$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon} [v\bar{v} - \frac{1}{2}(u\bar{w} + w\bar{u})],$$



формально совпадающую с (4) на вещественных решениях. Здесь  $x \in S^1 = [0, 2\pi]$  и  $U(t, 0) = U(t, 2\pi)$  – пространственно-периодические граничные условия,  $\varepsilon$ -малая величина, которую мы выберем ниже. Все полученные результаты переносятся на двумерную и трехмерную модели (1), приведенные в [1].

Система (4) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа, состоящего из частиц со скоростями  $c = 1, 0, -1$  (их плотности соответственно  $u = n_1(x, t), v = n_2(x, t), w = n_3(x, t)$ ). Две частицы – одна первого, а вторая третьего типов, сталкиваясь с вероятностью, пропорциональной  $uw = n_1(x, t)n_3(x, t)$ , вызывают реакцию, переводящую их в две частицы второго типа. В свою очередь, две частицы второго типа, сталкиваясь с вероятностью  $v^2 = n_2(x, t)^2$ , переходят в одну частицу первого типа и в одну частицу третьего типа. Эта модель при всей схожести с моделью Карлемана не имеет квадратичных диссипирующих интегралов, в связи с чем, как отмечено в [1], получение глобальной теоремы существования затруднительно.

Дискретные модели кинетики достаточно просты, но очень интересны с точки зрения *потери симметрии* [3], [4] и наличия эффекта *необратимости*. Более того, они дают подход к объяснению фрактальной, многомерной сложности аттрактора через его структурированность, позволяют проверить гипотезу существования податтракторов кинетических уравнений. По сути, приемом довольно часто применяемым в математике, удастся уйти от хорошо известной сложности исследования кинетического уравнения Больцмана за счет разбиения частиц на семейства, расположенные в разных подпространствах и способных в результате взаимодействия переходить из одного подпространства в другое. Формально, за счет увеличивая размерность пространства переменных, удастся упростить, сделать более прозрачным действие оператора взаимодействий, доказать существование глобальных решений и получить их разложение по гладкости.

Для нас эти модели интересны еще с той точки зрения, что предварительный анализ спектра линеаризованных задач в окрестности равновесия установил наличие «щели» [6] в спектре, гарантирующей существование корректного усечения задачи [11], [13] в фазовое пространство консервативных (гидродинамических) переменных. Тем самым, удастся всю полученную информацию «спустить» вниз, в физические размерности пространства и получить информацию о природе реального оператора взаимодействия.

Мы докажем существование глобального малого возмущения  $U = U_e + \varepsilon^2 \mathcal{U}$  решения в окрестности состояния равновесия  $U_e = (u_e, v_e, w_e)^\top, v_e^2 = u_e w_e, \mathcal{U} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})^\top$ .

Малые возмущения (в окрестности состояния равновесия  $v_e^2 = u_e w_e$ ). Положим  $\tilde{u} = u_e/\varepsilon, \tilde{w} = w_e/\varepsilon, \tilde{v} = v_e/\varepsilon$ . Решение будем искать в следующем виде

$$u = u_e + \varepsilon^2 u_e^{\frac{1}{2}} \bar{u}, \quad v = v_e + \varepsilon^2 v_e^{\frac{1}{2}} \bar{v}, \quad w = w_e + \varepsilon^2 w_e^{\frac{1}{2}} \bar{w}.$$

Тогда система запишется в виде

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{U} + A \partial_x \bar{U} + B \bar{U} &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \Gamma(\bar{U}, \bar{U}), \\ \bar{U}(0) &= U^0, \end{aligned} \tag{7}$$



где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{w} & -2\sqrt{\tilde{w}\tilde{v}} & \tilde{v} \\ -2\sqrt{\tilde{w}\tilde{v}} & 4\tilde{v} & -2\sqrt{\tilde{u}\tilde{v}} \\ \tilde{v} & -2\sqrt{\tilde{u}\tilde{v}} & \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad \nu^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \tilde{w}^{\frac{1}{2}} \\ -2\tilde{v}^{\frac{1}{2}} \\ \tilde{u}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma(U, U) = \bar{v}^2 - \bar{u}\bar{w}, \quad \bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})^T.$$

Воспользуемся рядами Фурье по  $x$

$$\bar{U}(t, x) = \sum_Z U_k(t) e^{ikx}, \quad U_k \in C, \quad U_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{U}(t, x) e^{-ikx} dx,$$

где  $U_{-k} = \bar{U}_k$ , так как  $U(x, t)$  вещественнозначная. Введем нормализованную  $L_2$ -норму для вещественнозначной функции  $f(x)$

$$\|f\|_{H^0}^2 = \|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = |f_0|^2 + \sum_{Z \in Z_0} |f_k|^2.$$

Положим

$$\|f\|_{H^s}^2 = |f_0|^2 + \|f\|_{H^s}^2, \quad \|f\|_{H^s}^2 = \sum_{Z_0} |k|^{2s} |f_k|^2, \quad s \in R, \quad Z_0 = Z \setminus \{0\}.$$

Далее мы будем использовать это определение нормы как для решения  $U$ , так и для последовательности  $\{U_k\}$ .

Используя представление Фурье (в образах Фурье) функции  $U$  (как гладкого решения (4) переписем (4) в виде бесконечной связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье  $U_k(t) = (u_k, w_k, v_k)^T$ ,

$$\frac{d}{dt} U_k + \Lambda(k) U_k = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \Gamma(\widehat{U}, U)_k, \quad \Gamma(\widehat{U}, \widehat{U})_k = \sum_{k_1+k_2=k} (G U_{k_1}, U_{k_2}), \quad (8)$$

где

$$\Lambda = Aik + B = \begin{pmatrix} \tilde{w} + ik & \tilde{v} & -2\sqrt{\tilde{w}\tilde{v}} \\ \tilde{v} & \tilde{u} - ik & -2\sqrt{\tilde{u}\tilde{v}} \\ -2\sqrt{\tilde{w}\tilde{v}} & -2\sqrt{\tilde{u}\tilde{v}} & 4\tilde{v} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1). Нулевая мода ( $k = 0$ ).

$$\frac{d}{dt} U_0 + \Lambda(0) U_0 = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \Gamma(\widehat{U}, U)_0, \quad (9)$$

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} \tilde{w} & \tilde{v} & -2\sqrt{\tilde{w}\tilde{v}} \\ \tilde{v} & \tilde{u} & -2\sqrt{\tilde{u}\tilde{v}} \\ -2\sqrt{\tilde{w}\tilde{v}} & -2\sqrt{\tilde{u}\tilde{v}} & 4\tilde{v} \end{pmatrix}$$



или

$$\frac{1}{\tilde{w}^{1/2}} \frac{d}{dt} u_0 + \tilde{w}^{1/2} u_0 + \tilde{u}^{1/2} w_0 - 2\tilde{v}^{1/2} v_0 = \varepsilon^{3/2} \left[ v_0^2 - u_0 w_0 + \sum_{k>0} (2|v_k|^2 - u_k w_{-k} - u_{-k} w_k) \right], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{u}^{1/2}} \frac{d}{dt} w_0 + \tilde{w}^{1/2} u_0 + \tilde{u}^{1/2} w_0 - 2\tilde{v}^{1/2} v_0 &= \varepsilon^{3/2} \left[ v_0^2 - u_0 w_0 + \sum_{k>0} (2|v_k|^2 - u_k w_{-k} - u_{-k} w_k) \right], \\ -\frac{1}{2\tilde{v}^{1/2}} \frac{d}{dt} v_0 + \tilde{w}^{1/2} u_0 + \tilde{u}^{1/2} w_0 - 2\tilde{v}^{1/2} v_0 &= \varepsilon^{3/2} \left[ v_0^2 - u_0 w_0 + \sum_{k>0} (2|v_k|^2 - u_k w_{-k} - u_{-k} w_k) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} (\tilde{u}^{1/2} u_0) = \frac{d}{dt} (\tilde{w}^{1/2} w_0) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\tilde{v}^{1/2} v_0).$$

Тогда

$$\tilde{u}^{1/2} (u_0 - u_0^0) = \tilde{w}^{1/2} (w_0 - w_0^0) = -\frac{1}{2} \tilde{v}^{1/2} (v_0 - v_0^0).$$

Подставляя в последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0 + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0 - \varepsilon v_e^{1/2} d_0 &= -\varepsilon v_e^{1/2} \left[ \frac{3}{2} v_0^2 + 2b v_0 - 2c \right] - 2\varepsilon v_e^{1/2} (B(v, v)_0 + H(v)_0), \quad (11) \\ v_0|_{t=0} &= v_0^0, \end{aligned}$$

где  $L_e = 4v_e + u_e + w_e$ ,

$$B(v, v)_0 = \sum_{k_1+k_2=0} \left[ v_{k_1} v_{k_2} - \frac{1}{4} \left( v_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} v_{k_1} ds \right) \left( v_{k_2} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} v_{k_1} ds \right) \right],$$

$$\begin{aligned} H(v)_0 &= \frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=0} \left( e^{k_2 t} \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \left( v_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} v_{k_1} ds \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-k_1 t} \left( 2w_{k_1}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) \left( v_{k_2} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} v_{k_1} ds \right) \right), \end{aligned}$$

$$d_0 = \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=0, k_1, k_2 \in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} \left( 2w_{k_1}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right), \quad Z_0 = \{k \in Z, k \neq 0\},$$

$$b = -\frac{1}{2} \left( u_0^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + w_0^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_0^0 \right), \quad c = \frac{1}{4} \left( 2u_0^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_0^0 \right) \left( 2w_0^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_0^0 \right).$$



Выберем начальные данные из условий

$$v_0^0 = -\frac{2(\tilde{v}^{1/2}\tilde{w}^{1/2}u_0^0 + \tilde{v}^{1/2}\tilde{u}^{1/2}w_0^0)}{\tilde{u} + \tilde{w}}, \quad u_e^{1/2}u_0^0 - w_e^{1/2}w_0^0 = 0, \quad (12)$$

отвечающих двум законам сохранения системы (8). Тогда  $b = c = H(v_0)_0 = 0$ .

**Неоднородное уравнение Риккати.** Теперь рассмотрим неоднородное уравнение Риккати в случае, когда  $a_0 = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_0 + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_0 + d_0 &= -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}v_0^2 + 2\varepsilon^{3/2}\tilde{v}^{1/2}f(t), \\ v_0|_{t=0} &= v_0^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Приведем здесь хорошо известные факты о неоднородном уравнении Риккати. Положим  $v_0 = v_{\text{stn}} + \varepsilon z$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z + \frac{1}{\varepsilon}(L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2}v_{\text{stn}})z &= -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}z^2 + f(t), \\ z|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $v_{\text{stn}}$  – ограниченное решение стандартного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{\text{stn}} + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_{\text{stn}} + d_0 &= -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}v_{\text{stn}}^2, \\ v_0|_{t=0} &= v_0^0. \end{aligned} \quad (15)$$

Положим

$$L = \min_{0 \leq s \leq \infty} \left( L_e - \frac{3}{2}\varepsilon^2 v_{\text{stn}} \right) > 0, \quad M_0 = \max_{0 \leq s \leq \infty} |f(t)|.$$

**Предложение 1.** Пусть фиксировано  $M_0$ ,  $\max_{0 \leq s \leq \infty} |f(t)| \leq M_0$ , а равновесные значения  $u_e, v_e, w_e$  и постоянная  $\varepsilon$  выбраны из условия

$$\varepsilon^2 \frac{(1 + 3\varepsilon v_e M_0)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon^3 v_e M_0}{L^2} \right)^2 \leq 1. \quad (16)$$

Тогда существует абсолютно непрерывное решение задачи (15), для которого справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |z(t)| \leq (1 + 3\varepsilon v_e M_0)^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon^3 v_e M_0}{L^2} \right). \quad (17)$$

□ Рассмотрим приближение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z_n + \frac{1}{\varepsilon}(L_e + 3\varepsilon^2 v_{\text{stn}})z_n &= -\frac{3}{2}\varepsilon v_e^{1/2}z_{n-1}^2 + f(t), \\ z_n|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$



$$z_n = \int_0^t \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_{\text{stn}}) d\tau \right\} \cdot \left[ \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} z_{n-1}^2 + f(t) \right] ds,$$

$$|z_n(t)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)| \frac{\varepsilon}{(L_e + 3\varepsilon^2 v_{\text{stn}})} \left[ 1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \frac{\left( \sup_{0 \leq s \leq t} |z_{n-1}| \right)^2}{\sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|} \right],$$

$$|z_1(t)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)| \frac{1}{L} \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f| \right),$$

$$|z_2(t)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)| \frac{\varepsilon}{L} \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)| \frac{\varepsilon^2}{L^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f| \right)^2 \right).$$

Положим  $q = \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|$ ,

$$s_1 = 1 + q,$$

$$s_2 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} (1 + q)^2 \leq (1 + q)^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \right),$$

$$s_3 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} (1 + q)^2 \right]^2 \leq 1 + q \frac{\varepsilon^2 (1 + q)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \right)^2 \leq 1 + q,$$

если  $q \in (0, 1)$ ,  $L > \varepsilon$  выбраны из условия

$$\frac{\varepsilon^2 (1 + q)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \right)^2 \leq 1 \iff$$

$$\frac{\varepsilon^2 \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)| \right)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{\frac{3}{2} \varepsilon^3 v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|}{L^2} \right)^2 \leq 1.$$

Тогда

$$s_4 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} (1 + q^2)^2 \right]^2 \right)^2 \leq 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} (1 + q)^2 \leq (1 + q)^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \right),$$

$$\begin{aligned} s_5 &= 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} (1 + q^2)^2 \right]^2 \right)^2 \right] = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} s_4 \leq \\ &\leq 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2} (1 + q)^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon q}{L} \right) \leq 1 + \frac{\varepsilon q}{L} \leq 1 + q. \end{aligned}$$



Таким образом,

$$s_{2j+1} \leq 1 + q, \quad s_{2j} \leq (1 + q)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$s_j \leq (1 + q)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right), \quad \forall j \geq 1$$

и

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |z_j(s)| \leq \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|\right)^2 \left(1 + \frac{\frac{3}{2} \varepsilon^3 v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|}{L^2}\right), \quad j \geq 1.$$

Далее, положим  $y_n = z_n - z_{n-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_n + \frac{1}{\varepsilon} (L_e + 3\varepsilon^2 v_{\text{stn}}) y_n &= -\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} (z_{n-1} + z_{n-2}) y_{n-1}, \\ y_n|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$y_n = - \int_0^t \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_{\text{stn}}) d\tau \right\} \cdot \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} (z_{n-1} + z_{n-2}) y_{n-1} ds,$$

$$|y_n(t)| \leq \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \frac{\varepsilon}{L} \sup_{0 \leq s \leq t} |y_{n-1}(s)| \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |z_{n-1}(s)| + \sup_{0 \leq s \leq t} |z_{n-2}(s)| \right) \leq$$

$$\leq 3\varepsilon v_e^{1/2} \frac{\varepsilon}{L} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|\right)^2 \left(1 + \frac{\frac{3}{2} \varepsilon^3 v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|}{L^2}\right) \sup_{0 \leq s \leq t} |y_{n-1}(s)|.$$

Выбираем дополнительно, чтобы

$$3\varepsilon v_e^{1/2} \frac{\varepsilon}{L} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|\right)^2 \left(1 + \frac{\frac{3}{2} \varepsilon^3 v_e^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} |f(s)|}{L^2}\right) = q_1 < 1.$$

Отсюда следует, что

$$z_n(t) \rightarrow z_0(t) \text{ в } C_B(R_+).$$



## 2. Система для старших мод

Теперь перейдем к исследованию старших мод ( $|k| \geq 1$ ), которые описываются системой

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_k + \Lambda(k)U_k &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \widehat{\Gamma(U, U)}_k, \\ U_k(0) &= U_k^0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{w}^{1/2}} \left( \frac{d}{dt}u_k + ik u_k \right) + \tilde{w}^{1/2}u_k + \tilde{u}^{1/2}w_k - 2\tilde{v}^{1/2}v_k &= \varepsilon^{3/2} \widehat{\Gamma(U, U)}_k, \\ \frac{1}{\tilde{u}^{1/2}} \left( \frac{d}{dt}w_k - ik w_k \right) + \tilde{w}^{1/2}u_k + \tilde{u}^{1/2}w_k - 2\tilde{v}^{1/2}v_k &= \varepsilon^{3/2} \widehat{\Gamma(U, U)}_k, \\ -\frac{1}{2\tilde{v}^{1/2}} \frac{d}{dt}v_k + \tilde{w}^{1/2}u_k + \tilde{u}^{1/2}w_k - 2\tilde{v}^{1/2}v_k &= \varepsilon^{3/2} \widehat{\Gamma(U, U)}_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\tilde{w}^{1/2}} \left( \frac{d}{dt}u_k + ik u_k \right) = \frac{1}{\tilde{u}^{1/2}} \left( \frac{d}{dt}w_k - ik w_k \right) = -\frac{1}{2\tilde{v}^{1/2}} \frac{d}{dt}v_k$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{ikt}\tilde{u}^{1/2}u_k) &= -\frac{1}{2}e^{ikt} \frac{d}{dt}(\tilde{v}^{1/2}v_k), \\ \frac{d}{dt}(e^{-ikt}\tilde{w}^{1/2}w_k) &= -\frac{1}{2}e^{-ikt} \frac{d}{dt}(\tilde{v}^{1/2}v_k). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_k &= -\frac{1}{2} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \left[ v_k - ik \int_0^t e^{-ik(t-s)} v_k ds - e^{-ikt} \left( 2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} u_k^0 + v_k^0 \right) \right], \\ w_k &= -\frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^{1/2}}{\tilde{w}^{1/2}} \left[ v_k + ik \int_0^t e^{ik(t-s)} v_k ds - e^{ikt} \left( 2 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} w_k^0 + v_k^0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение в (21), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_k + \frac{1}{\varepsilon} (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0)v_k + \frac{1}{\varepsilon} ik \int_0^t (e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e)v_k ds &= \\ &= v_e^{1/2}\varepsilon ik v_0 \int_0^t (e^{ik(t-s)} - e^{-ik(t-s)})v_k ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} - 2\varepsilon v_e^{1/2} [B(v, v)_k + H(v)_k] - \varepsilon v_e^{1/2} d_k(t), \quad k \in Z_0, \end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned}
 & B(v, v)_k = \\
 = & \sum_{k_1+k_2=k, k_1, k_2, k \in Z_0} \left[ v_{k_1} v_{k_2} - \frac{1}{4} (v_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} v_{k_1} ds) (v_{k_2} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} v_{k_2} ds) \right], \\
 H(v)_k = & \frac{1}{4} \sum_{k_1+k_2=k, k_1, k_2, k \in Z_0} \left[ e^{k_2 t} \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \left( v_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} v_{k_1} ds \right) + \right. \\
 & \left. + e^{-k_1 t} \left( 2w_{k_1}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) \left( v_{k_2} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} v_{k_2} ds \right) \right], \\
 d_{k_1, k_2} = & \frac{1}{2} \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \left( 2w_{k_1}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right), \quad Z_0 = \{k \in Z, k \neq 0\}, \\
 d_k^- = & w_e^{1/2} (2u_e^{1/2} u_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0), \quad d_k^+ = u_e^{1/2} (2w_e^{1/2} w_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0).
 \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 T_k y = & \frac{d}{dt} y + \frac{1}{\varepsilon} L_e y + ik \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (e^{ik(t-s)} u_e - e^{-ik(t-s)} w_e) y ds, \\
 A_k y = & \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t (e^{ik(t-s)} u_e - e^{-ik(t-s)} w_e) y ds, \quad A_k^{(1)} y = ik \int_0^t (e^{ik(t-s)} - e^{-ik(t-s)}) y ds.
 \end{aligned}$$

Так как наша техника базируется на разложении Фурье, мы можем выбрать задачу Коши для систем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} v_0 + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0 = & -\varepsilon v_e^{1/2} \frac{3}{2} v_0^2 - 2\varepsilon v_e^{1/2} (B(v, v)_0 + H(v)_0) - \varepsilon v_e^{1/2} d_0, \\
 v_0|_{t=0} = & v_0^0,
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$T_k v_k = -3v^{1/2} \varepsilon v_0 v_k + v_e^{1/2} \varepsilon v_0 A_k^{(1)} v_k + \tag{23}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} - 2\varepsilon v_e^{1/2} [B(v, v)_k + H(v)_k] -$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m, k_1, k_2, k \in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1, k_2}, \quad k \in Z_0,$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0.$$



за первоначальную форму системы (8), которая эквивалентна системе (4) для гладких решений. Запишем ее в слабой форме

$$v_0(t) = v_0^0 - v_e^{1/2} \varepsilon \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e (t-s)} \left[ \frac{3}{2} v_0^2 + 2(B(v, v)_0 + H(v)_0) - d_0 \right] ds, \quad (24)$$

$$v_k(t) = v_k^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0) ds \right\} - \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) -$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2} T_k^{-1}(d_k(t)) - v_e^{1/2} \varepsilon T_k^{-1} \mathcal{K}_k(v, v), \quad k \in Z_0$$

$$\mathcal{K}_k(v, v) = 3v_0 v_k + v_e^{1/2} \varepsilon v_0 A_k^{(1)} v_k + 2[B(v, v)_k + H(v)_k],$$

$$d_k(t) = \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m, k_1, k_2, k \in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1, k_2}.$$

**Определение 1.** Функцию  $U(t, x)$ , с коэффициентами Фурье  $U_k(t)$ ,  $k \geq 0$ ,  $U_{-k}(t) = \overline{U_k(t)}$ ,  $k > 0$ , назовем решением (8) на временном интервале  $[0, T]$ , если для любого  $k \in Z_0$  функции  $v_k(t)$  удовлетворяют системе интегральных уравнений (24).

### 3. Галеркинские приближения

Определим оператор усечения  $\Pi_m$ , действующий на последовательность коэффициентов Фурье

$$\Pi_m \varphi_k = (\Pi_m \varphi)_k = \begin{cases} \varphi_k & \text{если } |k| \leq m, \\ 0 & \text{если } |k| > m. \end{cases}$$

Теперь определим галеркинское усечение системы (70), (23) для аппроксимирующего решения  $U^{(m)}$  такого, что

$$U_{-k}^{(m)} = \overline{U_k^{(m)}}, \quad k \geq 1,$$

$$\frac{d}{dt} v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0^{(m)} = -\varepsilon v_e^{1/2} \frac{3}{2} (v_0^{(m)})^2 - 2\varepsilon v_e^{1/2} (\Pi_m B(\Pi_m v, \Pi_m v)_0 + H(\Pi_m v)_0) - \varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m d_0, \quad (25)$$

$$v_0^{(m)}|_{t=0} = v_0^0,$$

$$T_k v_k^{(m)} = -3v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} v_k^{(m)} + v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} v_k^{(m)} + \quad (26)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} - 2\varepsilon v_e^{1/2} [\Pi_m B(\Pi_m v, \Pi_m v)_k + \Pi_m H(\Pi_m v)_k]$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m, k_1, k_2, k \in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1, k_2}(t),$$



$$v_k|_{t=0} = v_k^0, \quad |k| \leq m, k \neq 0.$$

$$\begin{aligned} T_k v_k^{(m)} = & -3v^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} v_k^{(m)} + v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} v_k^{(m)} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} - 2\varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m H(\Pi_m v)_k \\ & - \varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m, k_1, k_2, k \in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1, k_2}(t), \end{aligned} \quad (27)$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0, \quad |k| > m.$$

и уравнения состояния

$$u_0^{(m)} = -\frac{1}{2} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_0^{(m)}, \quad w_0 = -\frac{1}{2} \frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} v_0^{(m)}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_k^{(m)} = & -\frac{1}{2} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_k^{(m)} + \frac{1}{2} ik \int_0^t e^{-ik(t-s)} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_k^{(m)} ds + e^{-ikt} u_k^0 + \frac{1}{2} e^{-ikt} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_k^0, \\ w_k^{(m)} = & -\frac{1}{2} \frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} v_k^{(m)} - \frac{1}{2} ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} v_k^{(m)} ds + e^{ikt} w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} e^{ikt} v_k^0, \quad k \in Z_0. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma > 2$  и  $v(0) = v^0 \in H^\sigma(0, 2\pi)$ . Пусть  $m \in N$  фиксировано. Тогда существует  $T^* > 0$ , возможно зависящее от  $m$ , такое что система (25), (26), (27) имеет единственное решение на интервале  $[0, T^*]$ . Это решение  $v = v^{(m)}(t)$  может быть продолжено на максимальный интервал  $[0, T_{\max}^*)$  такой что  $T_{\max}^* = +\infty$ , если норма  $\|v(0)\|_{H^\sigma(0, 2\pi)}$  достаточно мала.

Заметим, что для доказательства теоремы существенна конечность системы обыкновенных дифференциальных с квадратичной нелинейностью. Следовательно, можно гарантировать конечный временной интервал  $[0, T^*]$  существования и единственности решения и максимальный интервал существования  $[0, T_{\max}^*)$ . Отметим, что в принципе  $T^*$  и  $T_{\max}^*$  могут зависеть от  $m$ . Ниже мы покажем, что это не так, т.е.  $T_{\max}^* = +\infty$ .

Чтобы доказать это и перейти к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в галеркинском усечении системы, нам необходимо получить глобальную априорную оценку для решений системы (25), (26), (27). Прежде чем переходить к доказательству априорной оценки, исследуем интегро-псевдодифференциальный оператор (гиперболический вариант оператора типа Гуртина-Пипкина [7]) в левой части уравнения (26). Свойства этого оператора позволяют избежать при доказательстве глобальной разрешимости схемы Мозера-Нэша и доказывать разрешимость в одном весовом гильбертовом пространстве.



#### 4. Интегро-псевдодифференциальные уравнения

Сначала найдем условия существования глобального решения интегро-псевдодифференциального уравнения

$$\partial_t v + \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e)v + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t [e^{\partial_x(t-s)}u_e - e^{-\partial_x(t-s)}w_e] \partial_x v ds = f + h, \quad (29)$$

$$v(0) = v^0.$$

В образах Фурье

$$\frac{d}{dt} v_k + A(k, \varepsilon)v_k = f_k(t) + h_k(t), \quad (30)$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0,$$

где

$$A(k, \varepsilon)v_k = \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e)v_k + \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e] v_k ds$$

– осциллирующая правая часть,

$$h_k(t) = \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} u_e^{1/2} e^{ikt} w_k^0 + \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} w_e^{1/2} e^{-ikt} u_k^0 + \frac{1}{\varepsilon} (w_e e^{-ikt} + u_e e^{ikt}) v_k^0$$

и для некоторого  $\mu > 0$  функция  $f_k(t) \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu\varepsilon}$ , где

$$\|g(t)\|_{L_{2,\gamma_g}(R_+)}^2 = \int_0^\infty e^{-2\gamma_g t} |g(t)|^2 dt.$$

Заметим, что этот оператор возникает при исследовании старших мод  $|k| \neq 0$ , т.е.  $k \in Z_0$ . Поэтому, в дальнейшем, мы будем считать, что целое  $k \neq 0$ .

Далее, положим  $v_k = y_k + e^{-\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)t} v_k^0$ . Тогда

$$T_k y_k \equiv \frac{d}{dt} y_k + \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e)y_k + \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e] y_k ds =$$

$$= f_k(t) + g_k^{(1)}(t) + g_k^{(2)}(t), \quad (31)$$

$$y_k|_{t=0} = 0,$$

$$g_k^{(1)}(t) = \left( \frac{ik u_e}{4v_e + u_e + w_e + i\varepsilon k} + \frac{ik w_e}{4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k} \right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+u_e+w_e)t} v_k^0 \in L_{2,\gamma}(R_+)$$

для любого  $\gamma > -\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + u_e + w_e)$  и для любого  $\gamma_g > 0$

$$g_k^{(2)}(t) = - \left[ \frac{ik u_e}{4v_e + u_e + w_e + i\varepsilon k} e^{ikt} + \frac{ik w_e}{4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k} e^{-ikt} \right] v_k^0 + h_k(t) \in L_{2,\gamma_g}(R_+)$$



– измененная осциллирующая правая часть.

Сделаем преобразование Лапласа по  $t$ , получим

$$\left[ p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e) + \frac{ik/\varepsilon}{p - ik}u_e - \frac{ik/\varepsilon}{p + ik}w_e \right] \widetilde{y}_k(p) = \widetilde{f}_k^{(1)}(p) + \widetilde{g}_k^{(2)}(p),$$

где  $f_k^{(1)}(t) = f_k(t) + g_k^{(1)}$ . Введем символ

$$\sigma(p) = \frac{\Sigma(p, k; \varepsilon)}{p^2 + k^2},$$

$$\Sigma(p, k; \varepsilon) = (p^2 + k^2)p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + \frac{ik}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e.$$

Формально мы можем написать преобразование Лапласа по  $t$  решения уравнения (31)

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_k(p, k) = & \frac{(p^2 + k^2)\widetilde{f}_k^{(1)}(p)}{(p^2 + k^2)p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + \frac{ik}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e} + \\ & + \frac{(p^2 + k^2)\widetilde{g}_k^{(2)}(p)}{(p^2 + k^2)p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + \frac{ik}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e}, \quad \Re p \geq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Чтобы получить оценки этого решения в соболевских нормах, приведем сначала широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

**Определение 2.** Назовем пространством Харди  $H_2(\Re p > \gamma, H)$  класс вектор-функций  $\widetilde{f}(p)$  со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ , голоморфных в полуплоскости  $\{p \in C : \Re p > \gamma \geq 0\}$ , для которых

$$\sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f}(x + iy)\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли-Винера для пространств Харди.

**Теорема** (Пэли-Винера).

1. Пространство  $H_2(\Re p > \gamma, H)$  совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), допускающих представление

$$\widetilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{pt} f(t) dt \quad (33)$$

для  $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$ ,  $p \in C$ ,  $\Re p > \gamma \geq 0$ .

2. Для любой вектор-функции  $\widetilde{f}(p) \in H_2(\Re p > \gamma, H)$  существует единственное представление (33), где вектор-функция  $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$ , причем справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(\gamma + iy)t} \widetilde{f}(\gamma + iy) dy, \quad t \in R_+, \quad \gamma \geq 0.$$



3. Для вектор-функций  $\widetilde{f}(p) \in H_2(\Re p > \gamma, H)$  и  $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$ , связанных соотношением (33), справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{H_2(\Re p > \gamma, H)}^2 &\equiv \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x + iy)\|_H^2 dy = \\ &= \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H)}^2. \end{aligned}$$

Если мы установим, что функция  $\widetilde{y}_k$  в (32) такова, что  $p\widetilde{y}_k$ ,  $\widetilde{y}_k$  и  $A_k\widetilde{y}_k$  принадлежат пространству Харди  $f(p) \in H_2(\Re p > \gamma)$  при некотором  $\gamma \in R$ , то по теореме Пэли-Винера функции  $\frac{d}{dt}y_k$  и  $A_k y_k$  принадлежат пространству  $L_{2,\gamma}(R_+)$  и, следовательно,  $y_k(t) \in W_{2,\gamma}^1(R_+; A)$ . Отсюда следует разрешимость уравнения (31) в пространстве  $W_{2,\gamma}^1(R_+; A)$ . Здесь

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+; A)}^2 = \|u\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \left\| \frac{d}{dt}u \right\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+)}^2 + \|Au\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.$$

Нам нужны оценки символа  $\sigma(p, k; \varepsilon)$  снизу. Докажем его строгую устойчивость то есть, что его корни находятся в левой полуплоскости  $\Re p < 0$  параметра  $p$ .

**Лемма 1.** Существует  $\mu > 0$  такое, что равномерно по  $k \in Z_0$  имеет место

$$|\Sigma(p, \varepsilon, k)| \geq c_0 > 0, \quad \forall k \in Z, p \in C, \Re p > -\mu_0\varepsilon, 0 < \mu_0 < 1.$$

□ 1). Сначала рассмотрим случай, когда  $u_e = w_e$ . Тогда

$$\Sigma_0(p, k; \varepsilon) = (p^2 + k^2)p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0$$

или

$$\left( p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e) \right) p^2 = -k^2 \left( p + \frac{4}{\varepsilon}v_e \right).$$

Очевидно (из изучения графика), это уравнение имеет ограниченную ветвь корня  $p_R(k, \varepsilon) \in (-\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e), -\frac{4}{\varepsilon}v_e)$ , которая монотонно возрастает от  $p_R(0) = -\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)$  к  $p_R(k) \rightarrow -\frac{4}{\varepsilon}v_e$ ,  $k \rightarrow +\infty$ . Есть еще две комплексно сопряженных ветви с вертикальными асимптотами  $p^\pm(k, \varepsilon) = \pm ik + \kappa_R + O(\frac{1}{k})$ , где

$$\kappa_R = -\frac{1}{2\varepsilon}(u_e + w_e).$$

Покажем, что эти ветви при  $|k| > 0$  не пересекают мнимой оси. Если  $p = iy$ ,  $y \in R$ ,  $y \neq 0$  имеем

$$i(k^2 - y^2)y - \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y^2 + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0,$$



т.е.

$$k^2 - y^2 = 0, \quad y^2 = 4k^2 \frac{v_e}{(4v_e + w_e + u_e)}.$$

Эта система не имеет вещественных решений, поскольку

$$\frac{4v_e}{(4v_e + w_e + u_e)} \neq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma_0(p, k; \varepsilon) \neq 0, \quad \forall p \in C, \quad \Re p \geq 0.$$

2). Теперь проверим устойчивость символа  $\Sigma(p, k, \varepsilon)$ . Для этого покажем, что корни находятся в левой полуплоскости параметра  $p$ . Сначала, также как выше, покажем что ветви корней не пересекают мнимой оси. Для  $p = iy, y \in R, k \neq 0$  имеем

$$i(k^2 - y^2)y - \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y^2 - \frac{k}{\varepsilon}(u_e - w_e)y + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0,$$

т.е.

$$k^2 - y^2 = 0, \quad -\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y^2 - \frac{k}{\varepsilon}(u_e - w_e)y + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0,$$

из второго уравнений получаем

$$k^2[\pm(u_e - w_e) + (w_e + u_e)] = 0 \implies 2u_e = 0 \text{ или } 2w_e = 0,$$

что невозможно, поскольку  $w_e > 0, u_e > 0$ . Таким образом, ветви не пересекают мнимой оси, если  $|k| \neq 0$ .

Теперь разделим полином  $\Sigma$  на  $p(p^2 + k^2)$ . После простых преобразований получим

$$\frac{\Sigma}{p(p^2 + k^2)} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}L_e \frac{1}{p} + \frac{ik}{\varepsilon} \left( u_e \frac{1}{p(p - ik)} - w_e \frac{1}{p(p + ik)} \right).$$

Откуда

$$\begin{aligned} & \Re \left( \frac{\Sigma}{p(p^2 + k^2)} \right) = \\ & = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \Re p \left( 4v_e \frac{1}{(\Re p)^2 + (\Im p)^2} + u_e \frac{1}{(\Re p)^2 + (\Im p - k)^2} + w_e \frac{1}{(\Re p)^2 + (\Im p + k)^2} \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\Re \left( \frac{\Sigma}{p(p^2 + k^2)} \right) \geq 1, \quad \forall p, \quad \Re p \geq 0.$$

В случае  $\Re p < 0$  и  $\min(|\Im p|, |\Im p + k|, |\Im p - k|) \geq \delta > 0, \delta < 1$ , имеем

$$\Re \left( \frac{\Sigma}{p(p^2 + k^2)} \right) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon} |\Re p| \frac{L_e}{\delta^2} > \frac{1}{2},$$



если  $|\Re p| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\delta^2}{L_e}$ . Отсюда

$$|\Sigma| \geq \frac{1}{2} |p| |p^2 + k^2| \geq \frac{1}{2} \delta^2, \quad \forall p, \Re p < 0, |\Re p| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\delta^2}{L_e}. \quad (34)$$

Далее рассмотрим прямые  $p = -\gamma + iy$ ,  $\gamma = \varepsilon \mu_1 > 0$ . Тогда

$$y(k^2 - y^2) = \mu_1 [2(4v_e + w_e + u_e)y + k(u_e - w_e) - 2\mu_1 \varepsilon^2 y], \quad (35)$$

$$(4v_e + w_e + u_e)y^2 + k(u_e - w_e)y - 4k^2 v_e = \varepsilon^2 \mu_1 [(k^2 + \mu^2) - 3y^2 + (4v_e + w_e + u_e)\mu_1].$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $\Re p > -\mu_1 \varepsilon$ ,  $|\Im p| \leq \delta$  или  $|\Im p - k| \leq \delta < 1$  или  $|\Im p - k| \leq \delta$  и  $k \in Z_0$ . Для больших  $k$ ,  $|k| \geq k_*$ ,  $k_* \gg 1$  в силу (34) для двух волновых ветвей корня полинома  $\Sigma(p; k, \varepsilon) = 0$  с вертикальными асимптотами асимптотика:  $p = \pm ik + \kappa_R^\pm + O(|k|^{-1})$ , где  $\kappa_R^+ = -u_e/\varepsilon$ ,  $\kappa_R^- = -w_e/\varepsilon$ . Для ограниченной диффузионной ветви ( $\Re p_D < 0$  имеет место асимптотика  $p = -4v_e/\varepsilon + O(|k|^{-1})$ ). Отсюда следует, что для  $\Re p > -\mu_1 \varepsilon$ ,  $|\Im p| \leq \delta$  или  $|\Im p - k| \leq \delta < 1$  или  $|\Im p - k| \leq \delta$  и  $k \in Z_0$  система (35) не имеет вещественных решений для любых  $\varepsilon \leq 1$  и достаточно малого  $\mu_1 = \mu(\delta, \varepsilon) > 0$ , поскольку для конечных  $|k| \leq k_*$  этот результат следует из исследования случая  $p = iy$ ,  $y \in R$ ,  $k \neq 0$ .

Таким образом, равномерно по  $k \in Z_0$  имеем

$$|\Sigma(p, \varepsilon, k)| \geq c_0 > 0, \quad \forall p \in C, \Re p > -\frac{1}{2} \mu_1 \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Теперь уточним полученную выше оценку.

**Лемма 2.** *Существуют положительные  $\mu_0 \in (0, 1)$ ,  $c_0 > 0$  такие, что равномерно по  $k \in Z_0$*

$$\sup_{\Re p \geq 0} \left| \frac{p}{\sigma(p, k)} \right| \leq c_0, \quad (36)$$

для любых  $\Re p > -\mu \varepsilon$ .

□ Для этого оценим снизу функцию  $Z_k(p) = \sigma(p, k)/p$ . Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon Z_k(p) &= \frac{\varepsilon(p^2 + k^2)p + (4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik(u_e - w_e)p + 4k^2 v_e}{p(p^2 + k^2)} = \\ &= \varepsilon + (v_e + w_e) \frac{1}{p + ik} + (v_e + u_e) \frac{1}{p - ik} + 4v_e \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon \Re Z_k(p) = \varepsilon + \Re p \left( \frac{(v_e + w_e)}{(\Re p)^2 + (\Im p + k)^2} + \frac{(v_e + u_e)}{(\Re p)^2 + (\Im p - k)^2} + \frac{4v_e}{(\Re p)^2 + (\Im p)^2} \right).$$



Откуда следует, что

$$\Re Z_k(p) \geq 1, \quad \Re p \geq 0$$

и требуемая оценка.

Теперь посмотрим поведение  $|Z_k(p)|$  в окрестности  $\Re p = 0$ . Если  $|\Im p| \geq \mu_1$ ,  $0 < \mu_1 \leq \frac{1}{2}$ ,  $|\Im p - k| \geq \mu_1$ ,  $|\Im p + k| \geq \mu_1$ ,  $k \geq 1$ , то

$$|\varepsilon \Re Z_k(p)| \geq \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2} |\Re p| (\mu_1^2 (10v_e + w_e) + (v_e + u_e)) \geq \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2} |\Re p| (11v_e + u_e + w_e) > \frac{1}{2} \varepsilon,$$

если

$$|\Re p| \leq \frac{\mu_1^2 \varepsilon}{2(11v_e + u_e + w_e)}.$$

В случае  $|\Im p - k| \leq \mu_1$ ,  $|\Re p| \leq \mu_2 \varepsilon$  имеем

$$\left| \frac{p}{\sigma(p, k)} \right| \leq |p| |p^2 + k^2| \frac{1}{|\Sigma(p, k)|} \leq \frac{(|\Re p|^2 + 4k^2 - \mu_1^3)^{1/2} (|\Re p|^2 + k^2 - \mu_1^3)^{1/2}}{c_0(|p|^2 + k^2)} (|\Re p|^2 + \mu_1^2)^{1/2},$$

если в этой области  $|\Sigma(p, k)| \geq c_0(|p|^2 + k^2)$ . ■

Последнее неравенство есть следствие следующей леммы:

**Лемма 3.** *Существуют  $\mu_1$ ,  $0 < \mu_1 < 0$ ;  $c_0 > 0$  такие, что равномерно по  $k \in Z_0$  выполняется*

$$|\Sigma(p, k, \varepsilon)| \geq c_0(|p|^2 + k^2), \quad \Re p \geq -\mu_1 \varepsilon. \quad (37)$$

□ 1) Начнем с области  $\{\kappa_0 \Re p > |\Im p|\}$ . Здесь оценим главную часть символа  $\Sigma(p, k, \varepsilon)$ . Покажем, что в этой области  $|p(p^2 + k^2)| \geq c_1(|p|^2 + k^2)$  при  $|p| \geq c_0$  для достаточно большого  $c_0 = c_0(\kappa_0) \gg 1$ .

Положим  $p = y(\pm i + \mu)$ ,  $y \geq R_0$ ,  $\mu \geq \kappa_0$ . Рассмотрим три случая:  $\min\{|y-k|, |y+k|\} \geq \delta k$ ,  $|y-k| \leq \delta k$  и  $|y+k| \leq \delta k$ , где  $0 < \delta < 1$ ,  $k \geq 1$ . Случай целых  $k \leq -1$  исследуется таким же образом.

В первом случае

$$\begin{aligned} |p(p^2 + k^2)| &= |y||i + \mu|(\mu^2 y^2 + \delta^2 k^2) \geq \\ &\geq |y||i + \mu| \min \left\{ \delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right\} (|p|^2 + k^2) \geq R_0(1 + \mu^2)^{1/2} \min \left\{ \delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right\} (|p|^2 + k^2). \end{aligned}$$

Во втором случае  $|y| \geq (1 - \delta)k$ . Тогда

$$\begin{aligned} |p(p^2 + k^2)| &\geq |y|(1 + \mu^2)^{1/2} \mu |y| (\mu^2 y^2 + (2 - \delta)^2 k^2)^{1/2} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} R_0 \mu (\min\{\mu^2, (2 - \delta)^2\})^{1/2} \min \{(1 + \mu^2)^{1/2}, (1 + \mu^2)^{1/2}(1 - \delta)\} (|p|^2 + k^2). \end{aligned}$$

Теперь выберем  $R_0 = R_0(\kappa_0)$  из условия

$$R_0 \min_{\mu \geq \kappa_0} \left[ \min \left\{ (1 + \mu^2)^{1/2} \min \left\{ \delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right\} \right. \right. \right]$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \min\{\mu^2, (2 - \delta)^2\} \right)^{1/2} \min \left\{ (1 + \mu^2)^{1/2}, (1 + \mu^2)^{1/2}(1 - \delta) \right\} \Bigg\} \geq \\ & \geq \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e) \max_{|p|^2+k^2=1} \left| p^2 + ik \frac{(u_e - w_e)}{(4v_e + w_e + u_e)} p + 4k^2 \frac{v_e}{(4v_e + w_e + u_e)} \right|. \end{aligned}$$

Третий случай рассматривается аналогично.

2) Рассмотрим случай  $|\Im p| \geq \kappa_0 |\Re p|$ , и  $|\Re p| \leq \mu_1 \varepsilon$ . Напомним, что все оценки проводятся для  $|k| \geq 1$ .

а) Начнем со случая  $\Re p = 0$ . Тогда

$$\Re(\Sigma(p, k; \varepsilon))|_{\Re p=0} = \Im p (k^2 - (\Im p)^2)^2,$$

$$\Re(\Sigma(p, k; \varepsilon))|_{\Re p=0} = \frac{1}{\varepsilon} \left( (4v_e + w_e + u_e)(\Im p)^2 + k(u_e - w_e)\Im p - 4k^2 v_e \right).$$

Пусть для определенности  $k \geq 1$ . Рассмотрим три случая, когда  $\Im p - k \geq \delta k$ ,  $k \geq (1 - \delta)\Im p \geq 0$  или  $|\Im p - k| \leq \delta k$ .

В первом случае

$$\begin{aligned} |\Im p (k^2 - (\Im p)^2)^2| & \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \delta k |\Im p| (|\Im p| + (2 + \delta)k) + \delta^2 |\Im p| k^2 \right] \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{2} \delta, \delta^2 \right\} (|\Im p|^2 + k^2). \end{aligned}$$

Во втором случае используем тот факт, что также как выше, если  $|\Im p \pm k| \geq \delta |k|$ ,  $0 < \delta < 1$

$$|\Im p (k^2 - (\Im p)^2)^2| \geq \delta^2, |\Im p| k^2 \geq \frac{1}{2} \delta^2 |\Im p| (1 - \delta)^2 (k^2 + |\Im p|^2).$$

Отсюда следует, что для  $|\Im p| \geq c_1$  имеем

$$|\Im p (k^2 - (\Im p)^2)^2| \geq \frac{1}{2} \delta^2 c_1 (1 - \delta)^2 (k^2 + |\Im p|^2).$$

В третьем случае  $|\Im p| \geq (1 - \delta)k$ ,  $\Im p \leq (1 + \delta)k$  и

$$\begin{aligned} |\Re(\Sigma(p, k; \varepsilon))|_{\Re p=0} & \geq \frac{1}{\varepsilon} [2u_e - (4v_e + w_e + u_e)(2 + \delta)\delta - |u_e - w_e|\delta] k^2 \geq \\ & \geq \frac{1}{\varepsilon} u_e k^2 \geq \frac{1}{2\varepsilon} u_e (k^2 + (2 + \delta)^{-2} |\Im p|^2) \geq \frac{1}{2\varepsilon} u_e (2 + \delta)^{-2} (k^2 + |\Im p|^2) \end{aligned}$$

для достаточно малого  $\delta$ .

В тоже время, для достаточно малого  $c_1$  при  $|\Im p| \leq c_1$

$$|\Re(\Sigma(p, k; \varepsilon))|_{\Re p=0} = \frac{1}{\varepsilon} |4v_e + w_e + u_e| (\Im p)^2 + k(u_e - w_e)\Im p - 4k^2 v_e \geq \frac{1}{\varepsilon} k^2 v_e, \quad |k| \geq 1.$$



Следовательно,

$$|\Sigma(p, k; \varepsilon)|_{\Re p=0} \geq c_0(k^2 + |\Im p|^2), \quad |\Im p| \geq 0, \quad |k| \geq 1.$$

Отсюда вытекает существование достаточно малого  $\mu_1 > 0$  такого, что

$$|\Sigma(p, k; \varepsilon)| \geq c_0(\mu_1)(|p|^2 + k^2)$$

для  $|\Im p| \geq \kappa_0 |\Re p|$ ,  $|\Re p| \leq \mu_1 \varepsilon$ .

б) Теперь рассмотрим случай  $|\Im p| > \kappa_0 \Re p$ ,  $\Re p \geq \mu_1 \varepsilon$ . Заметим, что корни полинома

$$(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik(u_e - w_e)p + 4k^2v_e = (4v_e + w_e + u_e)(p - p^+)(p - p^-) = 0$$

чисто мнимые

$$p^\pm = i \frac{k}{2(4v_e + w_e + u_e)} (-(u_e - w_e) \pm \sqrt{(u_e - w_e)^2 + 16v_e(4v_e + w_e + u_e)}) = ikh^\pm.$$

Положим  $p = kz$ ,  $B = \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)$ . Тогда

$$\Sigma(p, k, \varepsilon) = k^2 \left( k z(z+i)(z-i) + B(z-ih^+)(z-ih^-) \right).$$

Рассмотрим случай  $\Omega^+ = \{\Im p > \kappa_0 \Re p, \Re p \geq \mu_1 \varepsilon\}$  (случай  $\Im p < -\kappa_0 \Re p, \Re p \geq \mu_1 \varepsilon$  анализируется аналогично). В  $\Omega^+$  имеем

$$|z(z+i)(z-i)| \geq \mu_1 \varepsilon |z| (|z|^2 + 1)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1^2 \varepsilon^2 (|z|^2 + 1).$$

Отсюда

$$|\Sigma(p, k, \varepsilon)| \geq k^2 \left( k \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1^2 \varepsilon^2 (|z|^2 + 1) - B \max(1, |h^-|) (|z| + 1)^2 \right) \geq c_0 k^2 (|z|^2 + 1) = c_0 (|p|^2 + k^2)$$

для достаточно большого  $|k| \geq 2\sqrt{2}B \max(1, |h^-|) (\mu_1 \varepsilon)^{-2}$ .

Теперь рассмотрим случай  $|\Im p| > \kappa_0 \Re p$ ,  $\Re p \geq \mu_1 \varepsilon$  и  $1 \leq |k| \leq k_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\Sigma(p, k, \varepsilon)| &= k^3 |(z+i)(z-i)| \left| z + \frac{1}{k} B \frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)} \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1 \varepsilon (|z|^2 + 1) \left| z + \frac{1}{k} B \frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)} \right|. \end{aligned}$$

Очевидно, что в области  $\Omega^+$

$$\min_{z \in \Omega^+} \left| z + \frac{1}{k} B \frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)} \right| = c_1 > 0.$$



Отсюда

$$|\Sigma(p, k, \varepsilon)| \geq c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1 \varepsilon (|z|^2 + 1) \geq \frac{c_1}{k_0^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1 \varepsilon (|p|^2 + k^2).$$

Суммирование полученных оценок приводит к неравенству (37). ■

**Лемма 4.** Для  $\mu > 0$  из предыдущей леммы справедлива следующая оценка

$$\left| \frac{\tilde{A}(p, \varepsilon, k)}{\sigma(p, \varepsilon, k)} \right| \leq c_1, \quad \forall k \geq 0, p \in C, \Re p \geq -\mu\varepsilon, \quad (38)$$

равномерно по  $k \in Z_0$ .

□ В силу оценки (37) имеем

$$\left| \frac{\tilde{A}}{\sigma(p, k)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik\frac{1}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + 4k^2\frac{1}{\varepsilon}v_e}{(p^2 + k^2)p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik\frac{1}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + 4k^2\frac{1}{\varepsilon}v_e} \right| \leq c_1. \quad \blacksquare$$

Разрешимость интегро-дифференциального уравнения.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f_k^{(1)} \in L_{2,\gamma_f}(R_+, H)$ ,  $\gamma_f > -\mu\varepsilon$  и  $g^{(2)} = 0$ . Тогда для любого  $\gamma > \gamma_f$  задача (31) однозначно разрешима в пространстве  $W_{2,\gamma}^1(R_+, A)$  и для ее решения справедлива равномерная по  $k$  оценка

$$\|y_k\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+, A)} \leq d (\|f_k\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |v_k^0|) \quad (39)$$

с постоянной  $d$ , не зависящей от  $k$  и  $f_k, v_k^0$ .

Здесь

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+, A)}^2 = \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \|Au\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \|u\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.$$

□ Умножение на аналитическую и ограниченную не выводит из пространства Харди  $H_2(\Re p > \gamma, H)$ . Поэтому из  $\widetilde{f_k^{(1)}} \in H_2(\Re p > -\mu\varepsilon)$  следует, что функции  $p\tilde{y}_k, \widetilde{A_k y_k}$  принадлежат пространству Харди  $H_2(\Re p > -\mu\varepsilon)$  и справедлива оценка

$$\|Ay_k(t)\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \left\| \frac{d}{dt} y_k \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq d_1 (\|f_k^{(1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |v_k^0|^2).$$

Отсюда следует искомое неравенство (40) с постоянной  $d_1$ , не зависящей от  $f_k^{(1)}, v_k^0, k$ . Таким образом, мы получили решение  $y_k(t)$  уравнения в (29). Покажем, что полученное решение удовлетворяет начальному условию  $y_k(+0) = 0$ . ■

**Замечание.** Если функция  $\varphi(p) \in H_2(\Re p > \gamma)$ , то для любого  $R > \gamma$  можно найти последовательность  $(R_n)$ , такую что  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma}^R \|\varphi(x + iR_n)\|_H dx = 0.$$



Очевидно, это есть следствие оценки

$$\int_{-R_n}^{R_n} \left( \int_{\gamma}^R |\varphi(x + iR_n)|^2 dx \right) dy \leq \int_{\gamma}^R \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(x + iR_n)\|_{H^2}^2 dx \right) dy \leq (R - \gamma) \|\varphi\|_{H_2(\Re p > \gamma)}^2.$$

Из доказанного выше следует, что  $y_k(t) \in L_{2,\gamma}(R_+)$ , т.е.  $\tilde{y}_k \in H_2(\Re p > \gamma)$ . Тогда по теореме Пэли-Винера получаем

$$y_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{-R_n}^{R_n} \tilde{y}_k(\gamma + ix) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iR_n}^{\gamma + iR_n} \tilde{y}_k(p) dp.$$

Функция  $\tilde{y}_k(p)$  является аналитической в правой полуплоскости  $\Re p > \gamma$ , следовательно, по теореме Коши

$$\begin{aligned} \int_{\gamma - iR_n}^{\gamma + iR_n} \tilde{y}_k(p) dp &= \left( \int_{\gamma - iR_n}^{R + iR_n} - \int_{\gamma - iR_n}^{R + iR_n} + \int_{R - iR_n}^{R + iR_n} \right) \tilde{y}_k(p) dp = \\ &= \int_{\gamma}^R \tilde{y}_k(x - iR_n) dx - \int_{\gamma}^R \tilde{y}_k(x + iR_n) dx + i \int_{-R_n}^{R_n} \tilde{y}_k(x - iR_n) dx. \end{aligned}$$

Согласно замечанию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma}^R |\tilde{y}_k(x - iR_n)| dx = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|y_k(0)\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R_n}^{R_n} |\tilde{y}_k(x - iR_n)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |(R + ix) \tilde{y}_k(R + ix)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{R^2 + x^2} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c(R) \|p \tilde{y}_k\|_{H_2(\Re p > \gamma)}. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $R_k \rightarrow \infty$  получим  $y_k(0) = 0$ .

Наконец, покажем, что полученное решение  $v_k(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} y_k + \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e) y_k + \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t [e^{ik(t-s)} u_e - e^{-ik(t-s)} w_e] y_k ds = f_k^{(1)}.$$

Для этого достаточно проверить, что  $y_k(t)$  есть решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_k + \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e) y_k + \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t [e^{ik(t-s)} u_e - e^{-ik(t-s)} w_e] y_k ds &= f_k^{(1)}, \\ y_k(0) &= 0. \end{aligned}$$



По теореме Пэли-Винора

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \sigma(\gamma + ix, k, \varepsilon)^{-1} [\widetilde{f_k^{(1)}}(\gamma + ix)] e^{(\gamma+ix)t} dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \sigma(p, k, \varepsilon)^{-1} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt} dp, \quad \gamma > -\mu\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt} y_k(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{p}{\sigma(p, k, \varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] \cdot e^{pt} dp, \quad \gamma > -\mu\varepsilon. \quad (40)$$

Далее, для  $\gamma > 0$  имеем

$$\begin{aligned} Ay_k(t) &= \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e) y_k + \\ &+ ik \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t [e^{ik(t-s)} u_e - e^{-ik(t-s)} w_e] \left( \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{1}{\sigma(p, k, \varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{sp} dp \right) ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + w_e + u_e) y_k + \\ &+ ik \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{[\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt}}{\sigma(p, k, \varepsilon)} \left( \int_0^t [e^{ik(t-s)} u_e - e^{-ik(t-s)} w_e] e^{ps} ds \right) dp = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{\widetilde{A_k} e^{pt}}{\sigma(p, k, \varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt} dp. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Ay_k(t) = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{\frac{1}{\varepsilon} [(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik \frac{1}{\varepsilon} (u_e - w_e)p + 4k^2 \frac{1}{\varepsilon} v_e] e^{pt}}{\Sigma(p, k, \varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt} dp, \quad (41)$$

$$\gamma > -\mu\varepsilon,$$

поскольку выражение под знаком интеграла не имеет особенностей и для любых  $\gamma_2 > 0$ ,  $-\mu\varepsilon < \gamma_1 < 0$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1-iR}^{\gamma_1+iR} \frac{\frac{1}{\varepsilon} [(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik \frac{1}{\varepsilon} (u_e - w_e)p + 4k^2 \frac{1}{\varepsilon} v_e] e^{pt}}{\Sigma(p, k, \varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_2-iR}^{\gamma_2+iR} \frac{\frac{1}{\varepsilon} [(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik \frac{1}{\varepsilon} (u_e - w_e)p + 4k^2 \frac{1}{\varepsilon} v_e] e^{pt}}{\Sigma(p, k, \varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt} dp. \end{aligned}$$

Из соотношений (40), (40) вытекает, что функция  $y_k(t)$  удовлетворяет (31) в случае  $g_k^{(2)} = 0$ . Теперь рассмотрим  $g_k^{(2)}$ . Очевидно  $g_k^{(2)}(t) \in L_{2,\gamma}(R_+)$ ,  $\gamma > 0$ . Преобразование



Лапласа

$$\widetilde{g}_k^{(2)}(p) = - \left( \frac{ik u_e}{(4v_e + u_e + w_e + i\varepsilon k)(p - ik)} + \frac{ik w_e}{(4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k)(p + ik)} \right) v_k^0$$

имеет чисто мнимые полюса  $p = \pm k$ . Поэтому, также как выше, показываем, что соответствующее решение  $y_k^{(2)}(t)$  задачи (31)

$$y_k^{(2)}(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \Sigma(p, k, \varepsilon)^{-1} (p^2 + k^2) \widetilde{g}_k^{(2)}(p) e^{pt} dp, \quad \gamma > -\mu\varepsilon,$$

поскольку  $(p^2 + k^2) \widetilde{g}_k^{(2)}(p)$  аналитично в полуплоскости  $\Re p > -\mu\varepsilon$ , и

$$\begin{aligned} & \|\Sigma(p, k, \varepsilon)^{-1} (p^2 + k^2) \widetilde{g}_k^{(2)}(p)\|_{H_2(\Re p > \gamma, H)}^2 = \\ & = \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Sigma(x + iy, k, \varepsilon)|^{-2} |(x + iy)^2 + k^2| |\widetilde{g}_k^{(2)}(x + iy)|^2 dy \leq \infty. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для  $-\mu\varepsilon < \gamma < 0$  имеет место

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_k^{(2)}(t) &= - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \Sigma(p, k, \varepsilon)^{-1} p(p^2 + k^2) \frac{ik u_e v_k^0}{(4v_e + u_e + w_e + i\varepsilon k)(p - ik)} e^{pt} dp + \\ &+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \Sigma(p, k, \varepsilon)^{-1} p(p^2 + k^2) \frac{ik w_e v_k^0}{(4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k)(p + ik)} e^{pt} dp, \end{aligned}$$

поскольку, в силу оценки (37), для  $-\mu\varepsilon < \gamma$

$$\begin{aligned} & \sup_{p = \Re p + ix, \Re p \geq \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Sigma(p, k, \varepsilon)^{-1} p(p^2 + k^2) \frac{ik w_e v_k^0}{(4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k)(p + ik)} \right|^2 dx \leq \\ & \leq c_0^2(\gamma) \sup_{p = \Re p + ix, \Re p \geq \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 w_e^2 |v_k^0|^2}{((4v_e + u_e + w_e)^2 + \varepsilon^2 k^2)(\gamma^2 + (x + k)^2)} dx = \\ & = c_0^2(\gamma) \sup_{p = \Re p + ix_1, \Re p \geq \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 w_e^2 |v_k^0|^2}{((4v_e + u_e + w_e)^2 + \varepsilon^2 k^2)(\gamma^2 + x_1^2)} dx_1 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} c_1(\gamma)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, что, равномерно по  $k$ , выполняется

$$\|p y_k^{(2)}\|_{H_2(\Re p > \gamma, H)} \leq c_* |v_k^0|, \quad \|y_k^{(2)}\|_{H_2(\Re p > \gamma, H)} \leq \frac{1}{(1 + |k|)} c_* |v_k^0| \implies y^{(2)}(0) = 0, \quad (42)$$

в силу оценки символа  $\Sigma(p, k, \varepsilon)$ .

**Замечание.** За счет перехода от системы (10), (21) к системе (70), (23) в правой части  $k$ -моды возникают осцилляции

$$h_k(t) = \frac{1}{\varepsilon} (d_k^+ e^{ikt} + d_k^- e^{-ikt}) - \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1 + k_2 = k, k \in Z_0} e^{i(k_1 - k_2)t} d_{k_1, k_2},$$



которые определяют часть решения

$$y_k^{(1)} = \xi_k^+ D_k^+ + \eta_k^- D_k^- ,$$

где  $D_k^\pm = T_k^{-1}(e^{\pm ikt})$ , для которого

$$A_k y_k^{(1)} = T_k y_k^{(1)} - \frac{d}{dt} y_k^{(1)} = h_k(t) - \frac{d}{dt} y_k^{(1)} .$$

Отсюда

$$A_k y_k^{(1)} - h_k(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R^+) .$$

Оператор  $A_k$  на функциях  $h_k(t)$  действует из  $L_{2,\gamma}(R_+)$ ,  $-\mu\varepsilon < \gamma < 0$  в  $L_\infty(R_+)$ , но не в  $L_2(R_+)$ .

В этом смысле решение можно считать обобщенным. Определим, в каком слабом смысле мы построили решение задачи (31).

**Определение 3.** Функция  $y_k(t) \in W_{2,\gamma}^1(R_+)$ ,  $\gamma > -\mu\varepsilon$ , называется обобщенным решением задачи (31), если для любой финитной  $\psi(t) \in C^\infty(R_+)$  выполнено интегральное тождество

$$\int_0^\infty T_k y_k(t) \psi(t) dt = \int_0^\infty (f_k^{(1)} + g_k^{(2)}) \psi(t) dt . \tag{43}$$

Покажем, что построенное формальное решение является обобщенным решением задачи (31) в сформулированном выше смысле. Действительно, для любой финитной  $\psi$  существует  $\gamma_\psi < 0$ , такое что образ Лапласа  $\tilde{\psi}(p)$  аналитичен в полуплоскости  $\Re p > \gamma_\psi$ . Тогда для  $0 > \gamma_1 > -\min\{\mu\varepsilon, |\gamma_\psi|\}$  в силу доказанных свойств решения имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T_k y_k(t) \psi(t) dt &= \int_0^\infty (e^{-|\gamma_1|t} T_k y_k(t)) (e^{|\gamma_1|t} \psi(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \widetilde{T_k y_k}(|\gamma_1| + ix) \tilde{\psi}(-|\gamma_1| + ix) dx = \int_{-\infty}^\infty (\tilde{f}_k^{(1)} + \tilde{g}_k^{(2)})(|\gamma_1| + ix) \tilde{\psi}(-|\gamma_1| + ix) dx = \\ &= \int_0^\infty (e^{-|\gamma_1|t} (f_k^{(1)} + g_k^{(2)})(t) (e^{|\gamma_1|t} \psi(t)) dt = \int_0^\infty (f_k^{(1)} + g_k^{(2)})(t) \psi(t) dt . \end{aligned}$$

### 5. Разложение по гладкости

1). Начнем с того, что заменой

$$v_k^{(m)} = y_k^{(m)} + v_k^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} , \quad L_e = 4v_e + w_e + u_e$$

в системе (25), (26) перейдем к нулевым начальным условиям. Положим

$$G_k^{(m)} = -2v_e^{1/2} \varepsilon [B^*(v_0^{(m)}, v_0^{(m)})_k + H^*(v_0^{(m)})_k + g_k^{(m)}] ,$$



$$\begin{aligned}
& B^*(v_0^{(m)}, v_0^{(m)})_k = \\
& = \Pi_m B \left( \Pi_m v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\}, \right. \\
& \quad \left. \Pi_m v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} \right)_k + \\
& + \frac{1}{4} \Pi_m \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} \Pi_m \left[ k_1 \int_0^\infty e^{ik_1 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} du \right] \times \\
& \quad \times \Pi_m \left[ k_2 \int_0^\infty e^{-ik_2 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} du \right] \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}; \\
& H^*(v_0^{(m)})_k = \Pi_m H \left( \Pi_m v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} \right)_k + \\
& + \frac{1}{4} \Pi_m \sum_{k_1+k_2=k, k_1, k_2, k \in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} \left( - \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \Pi_m k_1 \times \right. \\
& \quad \left. \times \int_0^\infty e^{ik_1 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} v_{k_1}^0 du \right) + \\
& + \left( 2w_{k_1}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) \Pi_m k_2 \int_0^\infty e^{-ik_2 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} v_{k_2}^0 du \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}, \\
& g_k^{(m)} = \frac{i}{2} k v_0^{(m)} v_k^0 \int_t^\infty (e^{ik(t-u)} - e^{-ik(t-u)}) \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} du \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}, \\
& b_{k_1, k_2} = \frac{1}{2} \left( \Pi_m \left[ k_1 v_{k_1}^0 \int_0^\infty e^{ik_1 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} du \right] \times \right. \\
& \quad \left. \times \Pi_m \left[ k_2 v_{k_1}^0 \int_0^\infty e^{-ik_2 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} du \right] - \right. \\
& \quad - \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \Pi_m k_1 \int_0^\infty e^{ik_1 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} v_{k_1}^0 du + \\
& \quad \left. + \left( 2w_{k_1}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) \Pi_m k_2 \int_0^\infty e^{-ik_2 u} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^u (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} v_{k_2}^0 du \right);
\end{aligned}$$



$$c_k^\pm(v_0^{(m)}) = \int_0^\infty e^{\mp ikt} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt,$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0^{(m)} &= -\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} (v_0^{(m)})^2 - \\ &- 2\varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m (B(\Pi_m y, \Pi_m y)_0 + H(\Pi_m y)_0 + H(\Pi_m y, v_0^{(m)})_0) + \\ &+ G_0^{(m)}(t) - \varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m \sum_{k_1+k_2=0} e^{i(k_2-k_1)t} \Pi_m (d_{k_1, k_2} + b_{k_1, k_2}), \\ v_0^{(m)}|_{t=0} &= v_0^0 \end{aligned} \tag{44}$$

$$T_k y_k^{(m)} = -3v^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} y_k^{(m)} + v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} y_k^{(m)} + G_k^{(m)}(t) + \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\varepsilon} (d_k^+ + v_e^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)} i k v_k^0 c_k^+(v_0^{(m)})) e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} (d_k^- + v_e^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)} i k v_k^0 c_k^-(v_0^{(m)})) e^{-ikt} - \\ &- \varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} \Pi_m (d_{k_1, k_2}(t) + b_{k_1, k_2}(t)) - \\ &- 2\varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m [B(\Pi_m y, \Pi_m y)_k + H(\Pi_m y, v_0^{(m)})_k + H(\Pi_m y)_k], \quad k \in Z_0, \end{aligned}$$

$$y_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad |k| \leq m, k \neq 0.$$

Здесь билинейные операторы  $B(y^{(m)}, y^{(m)})$ ,  $H(y^{(m)}, v^{(m)})$ :

$$\begin{aligned} B(y^{(m)}, y^{(m)})_k &= \sum_{k_1+k_2=k} \left[ \Pi_m(y_{k_1}^{(m)}) \Pi_m(y_{k_2}^{(m)}) - \right. \\ &\left. - \Pi_m \left( y_{k_1}^{(m)} - i k_1 \int_0^t e^{i k_1(t-s)} y_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( y_{k_2}^{(m)} + i k_2 \int_0^t e^{-i k_2(t-s)} y_{k_2}^{(m)} ds \right) \right], \quad k \in Z \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} H(y^{(m)}, v_0^{(m)})_0 &= \Pi_m \left( \sum_{k_1+k_2=0, |k_1| \leq m, k_1 \neq 0} \left[ \exp \left\{ -\int_0^t (4\tilde{v} + \tilde{w} + \tilde{u} + 5\varepsilon^{3/2} \tilde{v}^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left[ \Pi_m(v_{k_1}^0) \Pi_m(y_{k_2}^{(m)}) + \Pi_m(v_{k_2}^0) \Pi_m(y_{k_1}^{(m)}) \right] - \right. \\ &\Pi_m \left( y_{k_1}^{(m)} + i k_1 \int_0^t e^{-i k_1(t-s)} y_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( v_{k_2}^0 H_{k_2, w}(v_0^{(m)}, t) \right) - \\ &\left. \left. - \Pi_m \left( v_{k_1}^0 H_{k_1, u}(v_0^{(m)}, t) \right) \Pi_m \left( y_{k_2}^{(m)} + i k_2 \int_0^t e^{-i k_2(t-s)} y_{k_2}^{(m)} ds \right) \right) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \Pi_m \left( v_{k_1}^0 H_{k_1, u}(v_0^{(m)}, t) \right) \Pi_m \left( v_{k_2}^0 H_{k_2, w}(v_0^{(m)}, t) \right) \Big]. \\
 H(y^{(m)}, v_0^{(m)})_k &= \Pi_m \left( \sum_{k_1+k_2=k} \left[ \exp \left\{ - \int_0^t (4\tilde{v} + \tilde{w} + \tilde{u} + 5\varepsilon^{3/2}\tilde{v}^{1/2}v_0^{(m)}) ds \right\} \times \right. \right. \\
 & \times \left[ \Pi_m(y_{k_1}^{(m)}) \Pi_m(v_{k_2}^0) + \Pi_m(v_{k_1}^0) \Pi_m(y_{k_2}^{(m)}) \right] + \\
 & + \Pi_m \left( y_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} y_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( v_{k_2}^0 h_{k_2, w}(v_0^{(m)}, t) \right) \\
 & \left. \left. + \Pi_m \left( v_{k_1}^0 h_{k_1, u}(v_0^{(m)}, t) \right) \Pi_m \left( y_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} y_{k_2}^{(m)} ds \right) \right] \right).
 \end{aligned}$$

2). Оценим вклад билинейного оператора  $B(y^{(m)}, y^{(m)})$  в решение, выделив члены, принадлежащие  $L_{2, \gamma; 0 > \gamma > \mu \varepsilon}(R_+)$ . Наша цель – получить так называемое разложение по гладкости

$$\begin{aligned}
 y_k^{(m)} &= T_k^{-1} Y_k^{(m)} + T_k^{-1} D_k^{(m)}, \\
 D_k^\pm &= \xi_k^{(m)} e^{ikt} + \eta_k^{(m)} e^{-ikt}, \\
 D_k^\pm &= T_k^{-1}(e^{\pm ikt}), \quad Y_k^{(m)} \in W_{2, \gamma; 0 > \gamma > -\mu_0 \varepsilon}^1(R_+),
 \end{aligned} \tag{46}$$

где для  $k < 0$  положим  $\xi_k = \eta_{|k|}$ ,  $\eta_k = \xi_{|k|}$ ,  $D_k^+ = D_{|k|}^-$ ,  $D_k^- = D_{|k|}^+$ . Отсюда  $\xi_k D_k^+ = \eta_{|k|} D_{|k|}^-$ ,  $\eta_k D_k^- = \xi_{|k|} D_{|k|}^+$ ,  $D_k = D_{|k|}$ . Заметим, что  $T_k^{-1} D_k^{(m)}|_{t=0} = 0$ ,  $T_k^{-1} Y_k^{(m)}|_{t=0} = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 B(y^{(m)}, y^{(m)}) &= B(T^{-1} Y^{(m)}, T^{-1} Y^{(m)}) + B(T^{-1} D^{(m)}, T^{-1} Y^{(m)}) + \\
 & + B(T^{-1} Y^{(m)}, T^{-1} D^{(m)}) + B(T^{-1} D^{(m)}, T^{-1} D^{(m)}).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Начнем со старших мод  $k \in Z_0$ . Для  $k, k_1, k_2 \in Z_0$ :

$$\begin{aligned}
 B(T^{-1} Y^{(m)}, T^{-1} Y^{(m)})_k &= \sum_{k_1+k_2=k} \left( \Pi_m T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} \Pi_m T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} - \right. \\
 & \left. - \Pi_m \left( T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} ds \right) \right).
 \end{aligned} \tag{48}$$

**Лемма 5.** Для любых  $k, k_1, k_2 \in Z_0$ ,  $k + k_1 + k_2$  и  $u, v \in W_{L_{2, \gamma; 0 > \gamma > \mu \varepsilon}(R_+)}^1$  справедлива оценка

$$\|uv\|_{L_{2, \gamma; 0 > \gamma > \mu \varepsilon}(R_+)}^2 \leq$$



$$\leq \frac{2\pi}{k^2} \left( \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + k_1^2 \|u\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right) \left( \left\| \frac{d}{dt} v \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + k_2^2 \|v\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right).$$

а). Следствием этой леммы является приводимая ниже оценка для первых слагаемых в (47). Во-первых,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k_1+k_2=k, 0<|k|,|k_1||k_2|\leq m} \Pi_m T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{k^2} c_1^2 \sum_{k_1+k_2=k, 0<|k|,|k_1||k_2|\leq m} \left( \left\| \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + k_1^2 \left\| T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right) \times \\ & \quad \times \left( \left\| \frac{d}{dt} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + k_2^2 \left\| T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{k^2} c_1^4 \sum_{k_1+k_2=k, 0<|k|,|k_1||k_2|\leq m} \|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \end{aligned}$$

с постоянной  $c_1$  не зависящей от  $Y_k^{(m)} \in W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)$  и  $k \in Z_0$ ,

$$T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} ds = \int_0^t e^{ik_1(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} ds.$$

Далее, из приведенных выше свойств интегро-псевдодифференциального оператора  $T_k$  следует, что символ  $p(p + ik_1)/\Sigma(p, k_1)$  оператора  $\mathcal{T}y = \int_0^t e^{ik_1(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_1}^{-1} y ds$  ограничен в полуплоскости  $\Re p > \gamma = -\mu_0\varepsilon$ . в силу Лемм 2,3, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \left| \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} Y_{k_1}^{(m)} ds \right| & \leq \left( \int_0^\infty e^{-2|\gamma|t} dt \right)^{1/2} \left\| T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} Y_{k_1}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leq \\ & \leq \sqrt{2c_1\mu_0/\varepsilon} \|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \|B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)})_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ & \leq c_1^4 \left( \frac{1}{k^2} + \frac{4\mu_0}{\varepsilon} \right) \sum_{k_1+k_2=k, 0<|k|,|k_1||k_2|\leq m} \|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2. \end{aligned}$$

**Доказательство леммы.** В образах Лапласа по  $t$  получим

$$\|uv\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 = \sup_{\gamma>-\mu\varepsilon} \int_{\Re p=\gamma} \left| \int_{\Re s=\gamma} \tilde{u}(p-s)\tilde{v}(s)ds \right|^2 dp \leq$$



$$\leq 2 \left( \left\| \frac{d}{dt} v \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + k_1^2 \|v\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right) \sup_{\gamma>-\mu\varepsilon} \int_{\Re p=\gamma} \frac{dp}{|p|^2 + k^2} \int_{\Re s=\gamma} |\tilde{u}(p-s)|^2 ds +$$

$$+ 2 \|v\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \left( \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + k_2^2 \|u\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{|p|^2 + k^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $(|p|^2 + k^2) \leq 2[(|s|^2 + k_1^2) + (|p-s|^2 + k_2^2)]$ . ■

Для последовательности  $\{f_k^{(m)}(t), k \in Z_0, |k| \leq m\}$  положим

$$\|f^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 = \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} \|f_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2,$$

$$\|f^{(m)}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}^1(R_+)}^2 = \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} \left( \left\| \frac{d}{dt} f_k^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 + |k|^2 \|f_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \right),$$

$$\|f^{(m)}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}^1(R_+;A)}^2 = \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} \left( \left\| \frac{d}{dt} f_k^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}^2 + |k|^2 \|f_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 + \right.$$

$$\left. + \|A_k f_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \right).$$

Тогда

$$\| \varepsilon B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)}) \|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon c_1^2 \sum_{k \in Z_0} \sum_{k_1+k_2=k, 0 < |k_1|, |k_2|, |k| \leq m} \|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon c_2^2 \|Y^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^4.$$

b). Теперь оценим два следующих члена в (1). Имеем

$$J_1 = B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)})_k = \sum_{k_1+k_2=k} \left( \Pi_m T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} \Pi_m T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} - \right. \quad (49)$$

$$\left. - \Pi_m \left( T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} ds \right) \right),$$

$$k, k_1, k_2 \in Z_0.$$

Также как выше

$$\Pi_m \left( T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} ds \right) =$$

$$= -\Pi_m \left( \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \Pi_m \left( - \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} \frac{d}{ds} Y_{k_2}^{(m)} ds \right).$$



Из приведенных выше свойств интегро-псевдодифференциального оператора  $T_k$  следует, что  $T_k^{-1}D_k^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)$  и  $T_k^{-1}\frac{d}{ds}D_k^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \left| \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} D_{k_1}^{(m)} ds \right| &\leq \left( \int_0^\infty e^{-2|\gamma|t} dt \right)^{1/2} \left\| T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} D_{k_1}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)} = \\ &= \sqrt{2\mu_0/\varepsilon} \left\| T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} D_{k_1}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}. \end{aligned}$$

Оценим таким же образом  $T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)} = \int_0^t T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}ds$ . На основании этих оценок имеем

$$\begin{aligned} &\|J_1\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ &\leq \frac{2c_1^2\mu_0}{\varepsilon} \sum_{k_1+k_2=k, k_1, k_2, k \in Z_0, |k|, |k_1|, |k_2| \leq m} \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 (|\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2). \end{aligned}$$

с). Наконец, оценим

$$\begin{aligned} B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_k &= \sum_{k_1+k_2=k, k_1, k_2, k \in Z_0, |k|, |k_1|, |k_2| \leq m} \left[ \Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})\Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_2}^{(m)}) - \right. \\ &- \left. \Pi_m\left(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)} ds\right) \Pi_m\left(T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)} ds\right) \right] = \\ &= \sum_{k_1+k_2=k, |k|, 0 < |k_1|, |k_2| \leq m} \left[ \Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})\Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_2}^{(m)}) - \right. \\ &- \left. \Pi_m\left(\int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} \frac{d}{ds} D_{k_1}^{(m)} ds\right) \Pi_m\left(-\int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} \frac{d}{ds} Y_{k_2}^{(m)} ds\right) \right]. \end{aligned}$$

Решим теперь проблему с членами  $ik \int_0^t e^{ik(t-s)} D^+(s) ds$ ,  $ik \int_0^t e^{-ik(t-s)} D^-(s) ds$ , которые, как мы показали выше, не принадлежат  $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ . Выделим в них вклад осциллирующей части.

Слагаемое  $\Pi_m T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} \Pi_m T_{k_1}^{-1} D_{k_2}^{(m)}$  оценим по Лемме 5. Имеем

$$\begin{aligned} &\|\Pi_m T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} \Pi_m T_{k_1}^{-1} D_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ &\leq \frac{2c_1^2\mu_0}{\varepsilon} (|\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2) (|\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2). \end{aligned}$$

Далее,

$$\left\| \xi_{k_1}^{(m)} \eta_{k_2}^{(m)} \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1 s}) ds \int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s}) ds \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \left\| \frac{d}{ds} T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1 st}) \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \left\| \int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s}) ds \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ &\leq \frac{2c_1^2 \mu_0}{\varepsilon} (|\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2) (|\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались выражением для преобразования Лапласа

$$L\left(\int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s}) ds\right) = \frac{p}{\Sigma(p, k_2)}.$$

Откуда, в силу Леммы 3, следует, что  $\left\| \int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s}) ds \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq c_1^2$ .

Теперь оценим члены вида

$$I_1 = \eta_{k_1}^{(m)} \eta_{k_2}^{(m)} \left( T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds \right) \int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s}) ds,$$

и

$$I_2 = \xi_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1 s}) ds \left( T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 t}) - ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}) ds \right).$$

Далее, для определенности, рассмотрим случай  $k_1, k_2 > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} &-ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds = \frac{\varepsilon}{w_e} T_{k_1} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) - \tag{50} \\ &-\frac{\varepsilon}{w_e} \left[ \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) - \frac{1}{\varepsilon} L_e T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) - ik_1 u_e \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds \right] = \\ &= \frac{\varepsilon}{w_e} e^{-ik_1 s} - \frac{1}{w_e} \left[ \varepsilon \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) - (L_e - u_e) T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) + u_e \int_0^t e^{ik_1(t-s)} \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, осталось оценить только члены вида

$$\begin{aligned} I_3 &= \eta_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} \left( T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t}) + ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s}) ds \right) \times \\ &\times \left( T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 t}) - ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}) ds \right) = \\ &= \eta_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} e^{i(k_2 - k_1)t} + \eta_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t}) \frac{\varepsilon}{u_e} e^{ik_2 t} + \eta_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t}) T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 t}) - \\ &- \eta_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} \left\{ T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t}) \left( \frac{\varepsilon}{u_e} e^{ik_2 s} + \frac{1}{u_e} \left[ \varepsilon \frac{d}{dt} T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}) - (L_e - w_e) T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s}) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - w_e \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{ik_2 s}) ds \right] \right) + \right. \end{aligned}$$



$$-\frac{1}{w_e} \left[ \varepsilon \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1s}) - (L_e - u_e) T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1s}) + u_e \int_0^t e^{ik_1(t-s)} \frac{d}{dt} T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1s}) ds \right] \times \\ \times \int_0^t e^{ik_2(t-s)} \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2s}) ds \Big\}.$$

Здесь мы дважды воспользовались (50).

Из приведенных выше оценок следует, что

$$\| \varepsilon B^*(\Xi^{(m)}, \Upsilon^{(m)})_k \|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ \leq \varepsilon c_1^4 \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|,|k|\leq m, k_1, k_2, k \neq 0} (|\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2) (|\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2),$$

где

$$B^*(\Xi^{(m)}, \Upsilon^{(m)})_k = B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_k - a_k^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}, \\ a_k^{(m)}(t) = \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2|,|k|\leq m} \eta_{s_1}^{(m)} \xi_{s_2}^{(m)} e^{i(k_2-k_1)t}.$$

**Замечание.** Для  $k_1 < 0$  имеем

$$T_{k_1} y = \frac{d}{dt} y + \frac{1}{\varepsilon} L_e y + i|k_1| \int_0^t (w_e e^{i|k_1|(t-s)} - u_e e^{-i|k_1|(t-s)}) y ds.$$

Положим

$$T_{|k_1|}^{inv} y = \frac{d}{dt} y + \frac{1}{\varepsilon} L_e y + i|k_1| \int_0^t (w_e e^{i|k_1|(t-s)} - u_e e^{-i|k_1|(t-s)}) y ds.$$

Тогда для  $k_1 < 0$  имеем

$$T_{k_1} y = T_{|k_1|}^{inv} y$$

т.е.  $T_{k_1}^{-1} = (T_{|k_1|}^{inv})^{-1}$ .

Из этого наблюдения можно сделать следующие выводы.

1. Для  $k_1 < 0, k_2 < 0$

$$\left( ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} D_{k_2}^{(m)} ds \right) = \\ = \left( i|k_1| \int_0^t e^{i|k_1|(t-s)} (T_{|k_1|}^{inv})^{-1} D_{|k_1|}^{(m)} ds \right) \left( i|k_2| \int_0^t e^{-i|k_2|(t-s)} (T_{|k_2|}^{inv})^{-1} D_{|k_2|}^{(m)} ds \right) = \\ = \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \eta_{|k_2|} \xi_{|k_1|} e^{(-|k_2|+|k_1|)t} + \dots = \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \eta_{|k_2|} \xi_{|k_1|} e^{(k_2-k_1)t} + \dots$$

2. Для  $k_1 > 0, k_2 < 0$

$$\left( ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} D_{k_2}^{(m)} ds \right) =$$



$$= \left( -ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \left( i|k_2| \int_0^t e^{-i|k_2|(t-s)} (T_{|k_2|}^{inv})^{-1} D_{|k_2|}^{(m)} ds \right) = \\ -\frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \eta_{|k_2|} \eta_{k_1} e^{-|k_2|-k_1} + \dots = -\frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \eta_{|k_2|} \eta_{k_1} e^{k_2-k_1} + \dots .$$

3. Для  $k_1 < 0, k_2 > 0$

$$\left( ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} D_{k_2}^{(m)} ds \right) = \\ = \left( -i|k_1| \int_0^t e^{i|k_1|(t-s)} (T_{|k_1|}^{inv})^{-1} D_{|k_1|}^{(m)} ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} (T_{k_2}^{-1} D_{k_2}^{(m)} ds) \right) = \\ -\frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2} \xi_{|k_1|} e^{k_2+|k_1|} + \dots = -\frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2} \xi_{|k_1|} e^{k_2-k_1} + \dots .$$

Положим

$$B_*(Y^{(m)}, Y^{(m)}) = B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)}) + B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)}) + B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}D^{(m)}),$$

$$B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k = B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_k + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)}.$$

Тогда  $B_*$  часть  $B$  которая переводит

$$B_*(Y^{(m)}, Y^{(m)}) : (L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+))^2 \mapsto L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+),$$

и

$$B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k = B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_k + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}.$$

Таким образом, в переменных  $Y^{(m)}, D^{(m)}$  система (45) записывается в виде

$$Y_k^{(m)} + 3v^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} \quad (51) \\ = -D_k^{(m)} - 3v^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} D_k^{(m)} + v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} \\ + \frac{1}{\varepsilon} (d_k^+ + v_e^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)} i k v_k^0 c_k^+(v_0^{(m)})) e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} (d_k^- + v_e^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)} i k v_k^0 c_k^-(v_0^{(m)})) e^{-ikt} \\ - \varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} \Pi_m (d_{k_1,k_2}(t) + b_{k_1,k_2}(t) + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)}) \\ - 2\varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m [B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_k + B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k + H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k + H(T^{-1}Y^{(m)})_k] \\ - 2\varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m [H(T^{-1}D^{(m)}, v_0^{(m)})_k + H(T^{-1}D^{(m)})_k] + G_k^{(m)}(t), \quad k \in Z_0, \quad |k| \leq m, k \neq 0.$$



Заметим, что  $T_k^{-1}D_k^{(m)}|_{t=0} = 0$ ,  $T_k^{-1}Y_k^{(m)}|_{t=0} = 0$ . В силу Лемм 3-5 и приводимой ниже Леммы 6 получим

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon B_*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ & \leq \varepsilon c_1^4 \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m, k_1, k_2, k \neq 0} \|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \times \\ & \times \left( \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2 \right). \end{aligned}$$

**Лемма 6.** Аналитические в полуплоскости  $\Re p > \gamma; 0 > \gamma > -\mu\varepsilon$  функции  $\frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{1}{p \pm ik}$ ,  $\frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{k}{p(p \pm ik)}$ ,  $Q = p^2 + k^2$ , ограничены, т.е. существует  $c_0 > 0$  такое, что

$$\left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{1}{p \pm ik} \right| \leq c_0, \quad \left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{k}{p(p \pm ik)} \right| \leq c_0, \quad \forall p \in C, \Re p > \gamma, \quad 0 > \gamma > -\mu\varepsilon.$$

□ Действительно, во-первых

$$\left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{1}{p \pm ik} \right| \leq c_0 \frac{1}{|p \pm ik|}, \quad |p \pm ik| > \frac{1}{2}.$$

$$\left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{k}{p(p \pm ik)} \right| \leq c_0 \frac{1}{|p|} \cdot \frac{k}{|p \pm ik|}, \quad |p \pm ik| > \frac{1}{2}, \quad |p| > \frac{1}{2}.$$

Далее, в окрестности  $|p| \leq 1/2$  имеем

$$\left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{k}{p(p \pm ik)} \right| = \left| \frac{Q}{\Sigma} \right| \cdot \left| \frac{k}{(p \pm ik)} \right| \leq c_1,$$

и в окрестности  $|p \pm ik| \leq \frac{1}{2}$  имеем

$$\left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{k}{p(p \pm ik)} \right| \leq \frac{k|p - (\pm ik)|}{|\Sigma|} \leq c_2.$$

Точно также

$$\left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{1}{\pm ik} \right| \leq \frac{|p||p - (\pm ik)|}{|\Sigma|} \leq c_3. \quad \blacksquare$$

Из доказанного утверждения следует, что указанные функции интегрируемы с квадратом

$$\sup_{\gamma_1 \geq \gamma} \int_{\Re p = \gamma_1} \left( \left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{1}{p \pm ik} \right|^2 + \left| \frac{pQ}{\Sigma} \cdot \frac{k}{p(p \pm ik)} \right|^2 \right) dp < \infty.$$



**Лемма 7.** Из приведенных выше оценок частей билинейного оператора  $B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})$  следует равномерная по  $k$  априорная оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \|B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}}^2 \leq \\ & \leq \varepsilon C_B^2 \sum_{k_1+k_2=k, 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leq m} [\|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] [\|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2] \end{aligned} \quad (52)$$

для любой  $Y^{(m)} \in L_{2,\gamma; 0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$ .

Более того, справедлива априорная оценка вида

$$\varepsilon^2 \|B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}}^2 \leq \varepsilon C_B^2 \sum_{k_1+k_2=k, 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leq m} [|\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] [|\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2] \quad (53)$$

для любых  $\Xi^{(m)}, \Upsilon^{(m)} \in C^m$ .

## 6. Нулевая мода

Теперь посмотрим как влияет билинейный оператор

$$\begin{aligned} & \Pi_m (B(\Pi_m(v^{(m)}), \Pi_m(v^{(m)})))_0 = \sum_{k_1+k_2=0, |k_1|\leq m, k_1\neq 0} [v_{k_1} v_{k_2} - \\ & - \frac{1}{4} (v_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} v_{k_1}^{(m)} ds) (v_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} v_{k_1}^{(m)} ds)] \end{aligned}$$

на нулевую моду. При условиях на начальные данные (12) и (62), которое мы рассмотрим ниже, когда  $H(v)_0 = d_0 = 0$ , уравнение для нулевой моды принимает наиболее простой вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0 + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0 &= -\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} v_0^2 - 2\varepsilon v_e^{1/2} B(v, v)_0, \\ v_0|_{t=0} &= v_0^0, \end{aligned} \quad (54)$$

Для  $v = v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} dt + y^{(m)}$ ,  $y^{(m)}|_{t=0} = 0$ , положим

$$G_0^{(m)} = B \left( v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} dt, v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right)_0,$$

$$\begin{aligned} H(y^{(m)}, v_0^{(m)}) &= B \left( v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\}, y^{(m)} \right) + \\ &+ B \left( y^{(m)}, v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} \right). \end{aligned}$$



Далее, полагая, так же как и выше  $y^{(m)} = T_k^{-1}Y^{(m)} + T_k^{-1}Y^{(m)}$ , получим

$$\begin{aligned} & \Pi_m \left( B(\Pi_m(y^{(m)}), \Pi_m(y^{(m)})) \right)_0 = \\ & = \sum_{k_1+k_2=0, |k_1| \leq m, k_1 \neq 0} \left( (T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)} + T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})(T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)} + T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}) - \right. \\ & - \frac{1}{4} \left( T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)} + T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)} + ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} (T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)} + T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}) ds \right) \times \\ & \left. \times \left( T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)} + T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} (T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)} + T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}) ds \right) \right). \end{aligned}$$

Суммируя, изложенное выше, мы можем разложить компоненты билинейного оператора, выделив осциллирующую часть. Тогда  $B_0^*$  часть оператора  $B$ , которая переводит

$$B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0 : (L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+))^2 \mapsto L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+),$$

по следующему правилу

$$B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0 = B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)})_0 + B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)})_0 + B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_0.$$

Далее,

$$B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_0 = B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_0 - a_0^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon},$$

$$a_0^{(m)}(t) = \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1+k_2=0, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m} \eta_{s_1}^{(m)} \xi_{s_2}^{(m)} e^{i(k_2-k_1)t}.$$

Следовательно, несуммируемый в  $L_2$  вклад осцилляций определяется функцией  $a_0^{(m)}$ . Функция  $a^{(m)} \in C_B^1(R_+)$  меняет предельную константу на плюс бесконечности для стандартного уравнения

$$\frac{d}{dt} v_{\text{stn}} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{\text{stn}} = -3v_e^{1/2} \varepsilon v_{\text{stn}}^2 - 2v_e^{1/2} \varepsilon a_0^{(m)}, \quad (55)$$

$$v_{\text{stn}}(0) = v_0^0. \quad (56)$$

При этом нулевая мода

$$v_0^{(m)}(t) = v_{\text{stn}}^{(m)}(t) + \varepsilon \widehat{v_0^{(m)}}(t), \quad \widehat{v_0^{(m)}}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+).$$

Мы потребуем, чтобы  $a^{(m)}(t) \in C_B^1(R_+)$  была гладкой ограниченной функцией. Тогда стандартное уравнений имеет глобальное решение

$$v_{\text{stn}}^{(m)}(t) = v_+^{(m)}(t) - \left( (3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(t) \right) \times$$



$$\times \left( 1 + \exp \left\{ 3v_e^{1/2} \varepsilon \int_0^t ((3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(t)) ds + \tau \right\} + z^{(m)}(t) \right)^{-1}, \quad \tau \in R$$

такое, что  $\sup_{t \geq 0} e^t |v_{\text{stn}}^{(m)}(t)| \leq C_0$ , стабилизирующееся при  $t \rightarrow +\infty$  к функции  $v_+^{(m)}(t)$ ,  $z^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$ . Параметр  $\tau$  находим из условия

$$v_+^{(m)}(0) - \left( (3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(0) \right) (1 + e^\tau)^{-1} = v_0^0.$$

Здесь  $y = v_{\text{stn}}^{(m)}(t) - v_+^{(m)}(t)$  решение уравнения

$$Ly = \frac{d}{dt} y + \frac{1}{\varepsilon} L_e y - 3v_e^{1/2} \varepsilon y(y - 2v_+^{(m)}(t)) = 0.$$

Если

$$y = - \left( (3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(t) \right) \left( 1 + \exp \left\{ 3v_e^{1/2} \varepsilon \int_0^t ((3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(t)) ds + \tau \right\} \right)^{-1},$$

то

$$Ly = -2 \frac{d}{dt} v_+^{(m)}(t) \left( 1 + \exp \left\{ 3v_e^{1/2} \varepsilon \int_0^t ((3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(t)) ds + \tau \right\} \right)^{-1} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$$

при условии

$$(3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e - 2 \sup_{t>0} |v_+^{(m)}(t)| > \mu_0 \varepsilon.$$

Невязку  $z^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$ ,

$$Lz^{(m)} = -2 \frac{d}{dt} v_+^{(m)}(t) \left( 1 + \exp \left\{ 3v_e^{1/2} \varepsilon \int_0^t ((3v_e^{1/2} \varepsilon^2)^{-1} L_e + 2v_+^{(m)}(t)) ds + \tau \right\} \right)^{-1} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$$

будем искать, так же как во введении.

Частное решение  $v_+^{(m)}(t)$  будем искать как решение задачи

$$\frac{d}{dt} v_+^{(m)}(t) + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_+^{(m)}(t) - 3v_e^{1/2} \varepsilon (v_+^{(m)})^2(t) + 2v_e^{1/2} \varepsilon a_0^{(m)} = O(m^{-1}). \quad (57)$$

Для  $a_0^{(m)}(t) = \sum_{|k| \leq 2m, k \neq 0} h_k e^{ikt}$ ,  $|h_k| \leq |k|^{-1-\sigma}$ ,  $\sigma > 1$ , решение будем искать в виде  $v_+^{(m)}(t) = \sum_{|k| \leq m, k \neq 0} c_k e^{ikt}$ . Тогда

$$c_k = - \frac{3v_e^{1/2} \varepsilon \sum_{k_1+k_2=k} c_{k_1} c_{k_2}}{ik + \frac{1}{\varepsilon} L_e} + \frac{h_k}{ik + \frac{1}{\varepsilon} L_e}. \quad (58)$$

Положим  $A = \sum_k |k|^\sigma |h_k|$ . Разрешимость системы (58) есть следствие утверждения:



**Лемма 8.** Пусть  $A = \sum_{k, |k| \geq 1} |k|^\sigma |h_k| < \infty$ ,  $h_k \in C$ , для некоторого  $\sigma > 1$  и для семейства билинейных квадратичных форм  $B_m(u, u)$  равномерно по  $m$  справедлива оценка  $|B_m(c, c)_k| \leq \sum_{k_1+k_2=k} |c_{k_1}| |c_{k_2}|$ . Тогда для любого  $m \geq 1$  система билинейных уравнений

$$c_k = \varepsilon(h_k + B(c, c)_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (59)$$

имеет решение  $(c_1, \dots, c_m) \in C^m$ , для которого равномерно по  $m$  и  $k$  справедлива оценка

$$|c_k| \leq \varepsilon \left( |h_k| + \frac{A}{|k|^\sigma} \right), \quad k = 1, \dots, m, \quad (60)$$

если

$$\varepsilon^2 8cA \leq 1, \quad c = \sum_{k \in Z_0} \frac{1}{|k|^\sigma}.$$

□ Фиксируем  $m$ . Тогда для приближений  $(c_1^{(j)}, \dots, c_m^{(j)}) \in C^m$ :

$$c_k^{(j)} = \varepsilon[h_k + B(c^{(j-1)}, c^{(j-1)})_k], \quad k = 1, \dots, m,$$

$c_k^{(0)} = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , справедлива оценка (60), поскольку в силу индукции

$$\begin{aligned} |c_k^{(j)}| &\leq \varepsilon \left( |h_k| + \frac{\varepsilon^2}{|k|^\sigma} \sum_{k_1+k_2=k} \left[ (|k_1|^\sigma |h_{k_1}| + A) \left( |h_{k_2}| + \frac{A}{|k_2|^\sigma} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (|k_2|^\sigma |h_{k_2}| + A) \left( |h_{k_1}| + \frac{A}{|k_1|^\sigma} \right) \right] \right) \leq \\ &\leq \varepsilon \left( |h_k| + \varepsilon^2 \frac{8cA^2}{|k|^\sigma} \right) \leq \varepsilon \left( |h_k| + \frac{A}{|k|^\sigma} \right), \end{aligned}$$

если  $\varepsilon^2 8cA \leq 1$ . ■

Из ограниченности приближений следует существование решения  $(c_1, \dots, c_m) \in C^m$  системы (59), для которого справедлива оценка (60).

**Замечание.** Для оценки  $|kc_k|$ ,  $k \in Z_0$ , умножим (60) на  $|k|$ . Тогда

$$\begin{aligned} |kc_k| &\leq \varepsilon \left( |kh_k| + |k| \sum_{k_1+k_2=k} |c_{k_1}| |c_{k_2}| \right) \leq \varepsilon \left( |kh_k| + \sum_{k_1+k_2=k} |k_1 c_{k_1}| |c_{k_2}| + \sum_{k_1+k_2=k} |c_{k_1}| |k_2 c_{k_2}| \right) \leq \\ &\leq \varepsilon \left( |kh_k| + 2 \sum_{k_1+k_2=k} |k_1 c_{k_1}| |k_2 c_{k_2}| \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|kc_k| \leq \varepsilon \left( |kh_k| + \frac{A_1}{|k|^\sigma} \right), \quad A_1 = \sum_k |k|^{1+\sigma} |h_k| < \infty,$$



если

$$16\varepsilon^2 c A_1 \leq 1.$$

Для функции  $v_+^{(m)}(t) = \sum_{|k| \leq m, k \neq 0} c_k e^{ikt}$  имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} v_+^{(m)}(t) + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_+^{(m)}(t) + 3v_e^{1/2} \varepsilon (v_+^{(m)})^2(t) + 2v_e^{1/2} \varepsilon a_0^{(m)} = \\ & = 2v_e^{1/2} \varepsilon \sum_{m < |k| \leq 2m, k \neq 0} h_k e^{ikt} + 3v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \left( \sum_{|k| \leq m, k \neq 0} c_k e^{ikt} \right)^2 - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k_1 + k_2 = k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m} c_{k_1} c_{k_2} e^{ikt} \right] = O(m^{-1}). \end{aligned}$$

В зависимости от знака  $a_0^{(m)}$  нулевая мода либо проскакивает состояние равновесия либо не доходит до него. Решение стремится к нулю экспоненциально только при условии  $a^{(m)} = 0$ . В случае  $a^{(m)} \neq 0$  мы имеем только устойчивость по Ляпунову в окрестности состояния равновесия.

В переменных  $Y^{(m)}, D^{(m)}$  уравнение для нулевой моды

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( L_e - \frac{3}{2} \varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)} \right) v_0^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} a_0^{(m)} = \\ = G_0^{(m)} - 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0 - 2\varepsilon v_e^{1/2} B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} G_0^{(m)} = -2v_e^{1/2} \varepsilon \left[ B \left( v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. v^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} \right)_0 + B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_0 + H(T^{-1} D^{(m)}, v_0^{(m)})_0 \right]. \end{aligned}$$

## 7. Условия несекулярности

Как видно здесь за счет взаимодействия появляются члены с  $e^{i(k_2 - k_1)t}$ . Образ Лапласа решения с такой правой частью не будет аналитичен в полуплоскости  $\Re p > -\mu\varepsilon$ . Появляются полюса в точках  $p = i(k_2 - k_1)$ . Мы должны потребовать выполнения дополнительного условия на начальные данные мод любого порядка:

$$d_{k_1, k_2} = \frac{1}{2} \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \left( 2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) = 0,$$

$$d_k^- = w_e^{1/2} (2u_e^{1/2} u_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0) = d_k^+ = u_e^{1/2} (2w_e^{1/2} w_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0) = 0,$$

т.е. потребуем, чтобы

$$w_e^{1/2} (2u_e^{1/2} u_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0) = u_e^{1/2} (2w_e^{1/2} w_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0) = 0, \quad k \in Z_0. \quad (62)$$



Тогда

$$b_{k_1, k_2} = -\frac{1}{2}(ik_1 v_{k_1}^0)(ik_2 v_{k_2}^0) \left( \int_0^\infty e^{ik_1 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right) \times \\ \times \left( \int_0^\infty e^{-ik_2 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right),$$

и оставшиеся секулярные члены имеют вид

$$\varepsilon v_e^{1/2} \left( ik v_0^{(m)} v_k^0 [c_k^+(v_0^{(m)}) e^{ikt} + c_k^-(v_0^{(m)}) e^{-ikt}] - \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} (b_{k_1, k_2}(t) + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)}) \right).$$

**Замечание.** Положим  $Q_m = \{(k_1, k_2); k_1, k_2 \in Z_0, |k_1|, |k_2| \leq m, |k_1 - k_2| > m\}$ . Отметим, что случай  $|k_1 - k_2| > 2m$  невозможен для  $k_1, k_2, |k_1|, |k_2| \leq m$  Действительно, пусть для определенности  $k_1 > 0$ . Тогда  $-k_2 > m$ . Таким образом, в секулярных условиях мы исключили все возможные пары из  $Q_m$ .

Также как при исследовании нулевой моды разобьем осцилляции на две группы. Учитывая, что  $v_0^{(m)}$  по построению есть линейная комбинация экспонент  $\sum_{|k| \leq m, k \neq 0} c_k e^{ikt}$ , положим

$$ik \varepsilon v_0^{(m)} v_k^0 [c_k^+(v_0^{(m)}) e^{ikt} + c_k^-(v_0^{(m)}) e^{-ikt}] - \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t} \left( b_{k_1, k_2}(t) + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} \right) = \\ = S^{(m)} + S_1^{(m)},$$

где

$$S^{(m)}(t) = \sum_{|k| \leq m} s_k^{(m)} e^{ikt}, \quad S_1^{(m)}(t) = \sum_{|k| > m} s_k^{(m)} e^{ikt}.$$

Имеем

$$s_k^{(m)} = \sum_{q_1+q_2=k, |q_1| \leq m, 0 < q_2 \leq m, q_1 \neq 0} iq_2 c_{q_1} v_{q_2}^0 c_{q_2}^+(v_0^{(m)}) + \sum_{q_1+q_2=k, |q_1| \leq m, 0 > q_2 \geq -m, q_1 \neq 0} c_{q_1} c_{q_2}^-(v_0^{(m)}) - \\ - \sum_{q_1+q_2=k, |q_1|, |q_2| \leq m, q_1, q_2 \neq 0} \left( b_{q_1, q_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{q_2}^{(m)} \eta_{q_1}^{(m)} \right), \quad |k| \leq m, k \neq 0.$$

Нетрудно проверить, что равномерно  $|k|^\sigma |s_{1,k}^{(m)}| = O(m^{-1})$  и поэтому, также как при исследовании уравнения Риккати (нулевой моды), мы эти члены отбросим. Они будут не существенны при обосновании схемы Галеркина.

Оставшиеся секулярные члены  $s_k^{(m)} e^{ikt}$ ,  $|k| \leq m$ ,  $k \neq 0$  приводят к нелинейной системе для коэффициентов  $\xi_k^{(m)}, \eta_k^{(m)}$ . Для коэффициентов  $s_k^{(m)}$  потребуем выполнения следующего условия.



Условие несекулярности. Потребуем, чтобы для любых  $k \in Z_0$ ,  $|k| \leq m$ ,  $k \neq 0$  были выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \xi_k^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} \left( s_k^{(m)} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \kappa_k^{(m)} \right) &= 0, & 0 < k \leq m, \\ \eta_k^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} \left( s_k^{(m)} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \kappa_k^{(m)} \right) &= 0, & -m \leq k < 0. \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\kappa_k^{(m)} = \sum_{q_1+q_2=k, |q_1|,|q_2| \leq m, q_1, q_2 \neq 0} \xi_{q_2}^{(m)} \eta_{q_1}^{(m)}.$$

Существование решения системы для достаточно малой нормы  $\|v_0\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$  следует из Леммы 9, приведенной выше.

В дальнейшем, мы потребуем выполнение условий несекулярности (63) и условий (12), (62).

Остается вопрос, что будет в случае, когда для старших мод это условие не выполнено? Можно ли получить пусть слабое, но глобальное решение?

Заметим, что

$$\begin{aligned} ikc_k^\pm(v_0^{(m)}) &= \pm ik \int_0^\infty e^{\mp iks} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) e^{\mp iks} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует равномерная по  $k$  ограниченность

$$|ikv_0^{(m)} c_k^\pm(v_0^{(m)})| \leq \max \left\{ 1, \frac{\sup_{t \geq 0} |v_0^{(m)}| (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 |v_0^{(m)}|)}{\inf_{t \geq 0} (L_e - 3v^{1/2} \varepsilon^2 |v_0^{(m)}|)} \right\}.$$

Точно также для

$$\begin{aligned} j_k &= -2v_e^{1/2} \sum_{q_1+q_2=k, |q_1|,|q_2| \leq m, q_1, q_2 \neq 0} b_{q_1, q_2} = \\ &= v_e^{1/2} \sum_{q_1+q_2=k, |q_1|,|q_2| \leq m, q_1, q_2 \neq 0} (iq_1 v_{q_1}^0)(iq_2 v_{q_2}^0) \int_0^\infty e^{iq_1 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \times \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-iq_2 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt; \end{aligned}$$

для  $\sigma \geq 1$  имеем

$$|j_k| \leq v_e^{1/2} \frac{1}{|k|^\sigma} \sum_{q_1+q_2=k, |q_1|,|q_2| \leq m, q_1, q_2 \neq 0} \left\{ |q_1|^{1+\sigma} |v_{q_1}^0| \times \right.$$



$$\begin{aligned}
 & \times \left| \int_0^\infty e^{iq_1 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right| \times \\
 & \quad \times \left| q_2 v_{q_2}^0 \int_0^\infty e^{-iq_2 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right| + \\
 & + |q_2|^{1+\sigma} |v_{q_2}^0| \left| \int_0^\infty e^{iq_2 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right| \times \\
 & \quad \times \left| q_1 v_{q_1}^0 \int_0^\infty e^{-iq_1 t} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds \right\} dt \right| \leq \\
 & \leq 2\varepsilon v_e^{1/2} \frac{1}{|k|^\sigma} \max \left\{ 1, \frac{\sup_{t \geq 0} (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 |v_0^{(m)}|)}{(\inf_{t \geq 0} (L_e - 3v^{1/2} \varepsilon^2 |v_0^{(m)}|))^2} \right\} \left( \sum_{|q| \geq 1} |q|^\sigma |v_q^0| \right)^2.
 \end{aligned}$$

При выполнении условия достаточной малости нормы  $\|v^0\|_{H^\sigma}$  равномерно по  $m$  однозначно разрешима система для определения двух векторов коэффициентов осцилляций

$$\xi^{(m)} = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_m^{(m)}), \quad \eta^{(m)} = (\eta_1^{(m)}, \dots, \eta_m^{(m)})$$

так, что для решения системы (45) справедливо разложение по гладкости

$$y_k^{(m)}(t) = \xi_m^{(m)} D_k^+ + \eta_k^{(m)} D_k^- + Y_k^{(m)}(t), \quad D_k^\pm = T_k^{-1}(e^{\pm ik}), \quad |k| \leq m, \quad k \neq 0,$$

где  $Y_k^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ , и проблема существования глобального решения задачи (61), (51) сводится к проблеме для возмущения оператора  $\mathcal{A} = I + \varepsilon A(Y^{(m)})$  билинейным оператором с малой нормой

$$\mathcal{A}(Y^{(m)}) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) : \left( L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+) \right)^2 \mapsto L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+), \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
 A(Y^{(m)})_k &= 3v^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)}, \\
 \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)})_k &= v_e^{1/2} B_*(Y^{(m)}), \quad Y^{(m)}_k, \quad k \in Z_0, \quad |k| \leq m
 \end{aligned}$$

о существовании решения в пространстве  $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)$  неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}(Y^{(m)}) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) = G^{(m)}. \quad (65)$$

**Предложение 2.** Пусть  $v^0 \in H^\sigma$ ,  $\sigma > 1$ , выполнены условия несекулярности и условие (12). Тогда существует число  $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ , независящее от  $m$  такое, что, для достаточно малого  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , при условии  $\|v^0\|_{H^\sigma} \leq c_0$  и для любого  $m \in N$ , существует



решение  $v = v^{(m)}(t)$  системы (25), (26), которое является глобальным по времени. Более того, равномерно справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|v_0^{(m)} - v_{stn}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+)} &\leq c_0|v_0^0|, \\ \|v_k^{(m)}(t) - D_k^{(m)}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+;A)} &\leq c_0\|v_k^0\|, \quad \forall k \in Z_0, \\ |\xi_k^{(m)}| + |\eta_k^{(m)}| &\leq c_0 \frac{1}{|k|} |v_0^0| \left( |v_k^0| + \frac{1}{|k|^\sigma} A_v \right), \end{aligned}$$

где  $A_v = \sum_{k \in Z_0} |k|^\sigma |v_k^0| < \infty$ .

**Замечание.** Очевидно, что проведенные построения применимы к модификации (6). Но этот случай намного проще, поскольку здесь

$$a_0^{(m)} = \varepsilon^2 \frac{1}{u_e^2 w_e^2} \sum_{k_1+k_2=0, k \in Z_0, |k| \leq m} [u_e^2 \xi_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} + w_e^2 \eta_{k_1}^{(m)} \eta_{k_2}^{(m)}]$$

есть константа и можем не приближенно, а точно решить уравнения для нулевой моды. В тоже время

$$a_k^{(m)} = \varepsilon^2 \frac{1}{u_e^2 w_e^2} \sum_{k_1+k_2=k, k \in Z_0, |k| \leq m} [u_e^2 \xi_{k_1}^{(m)} \xi_{k_2}^{(m)} e^{ikt} + w_e^2 \eta_{k_1}^{(m)} \eta_{k_2}^{(m)} e^{-ikt}].$$

Это упрощает условие несекулярности и позволяет решить систему для  $k$  мод ( $|k| \leq m, k \neq 0$ ) опять же не приближенно, а точно. Ниже, для простоты, мы приведем вспомогательную задачу (линейную относительно старших мод) для такого случая, когда  $a_0^{(m)}$  – константа.

## 8. Модельная задача (априорная оценка)

Сначала рассмотрим задачу, линейную относительно  $Y^{(m)}$  (см. (44), (45)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( L_e - \frac{3}{2} \varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)} \right) v_0^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} a_0^{(m)} &= \\ = F_0 - 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0, \end{aligned} \quad (66)$$

$F_0 \in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu_0\varepsilon}$ , в случае, когда для простоты,  $a_0^{(m)}$  – константа.

$$\begin{aligned} Y_k^{(m)} + 3v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k &= \\ = -D_k^{(m)} - 3v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} Y D_k^{(m)} - v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1} D^{(m)}, v_0^{(m)})_k + \\ + \left( \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ + ik v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} v_k^0 c_k^+(v_0^{(m)}) \right) e^{ikt} + \left( \frac{1}{\varepsilon} d_k^- + ik v_k^0 c_k^-(v_0^{(m)}) \right) e^{-ikt} \\ - \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m, k_1, k_2 \neq 0} e^{i(k_2-k_1)t} \left( d_{k_1, k_2} + b_{k_1, k_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} \right) + F_k(t), \end{aligned} \quad (67)$$



$$k \in Z_0, \quad |k| \leq m, k \neq 0,$$

где

$$D_k^{(m)}(t) = \xi_k^{(m)} e^{ikt} + \eta_k^{(m)} e^{-ikt},$$

$$b_{k_1, k_2} = -\frac{1}{2} (ik_1 v_{k_1}^0) (ik_2 v_{k_2}^0) \int_0^\infty e^{ik_1 s} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt \int_0^\infty e^{-ik_2 s} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt,$$

$$d_{k_1, k_2} = \frac{1}{2} \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \left( 2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) = 0,$$

$$d_k^- = w_e^{1/2} (2u_e^{1/2} u_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0) = d_k^+ = u_e^{1/2} (2w_e^{1/2} w_k^0 + v_e^{1/2} v_k^0) = 0,$$

$F_k \in L_{2, \gamma; 0 > \gamma > \mu_0 \varepsilon}$ . Правая часть определилась разложением билинейного оператор  $B(v, v)$ . Здесь мы упростили задачу, положив что  $a_0^{(m)}$  – константа.

Постоянная  $a_0^{(m)}$  меняет предельную константу на плюс бесконечности для стандартного уравнения

$$\frac{d}{dt} v_{stn} + \frac{1}{\varepsilon} (4v_e + u_e + w_e) v_{stn} = -2v_e^{1/2} \varepsilon (v_{stn}^2 - a_0^{(m)}), \tag{68}$$

$$v_{stn}(0) = v_0^0. \tag{69}$$

Как мы показали выше, в этом случае  $v_0^{(m)}(t) = v_{stn}(t) + \varepsilon z^{(m)}(t)$ , где  $z^{(m)} \in L_{2, \gamma; 0 > \gamma > \mu \varepsilon}(R_+)$ ,  $v_{stn}(t)$  – решение стандартного уравнения Риккати.

1. К уравнению (66) (когда  $v_\infty^{(m)} = \text{const}$ ) применим результаты, проведенных выше исследований неоднородного уравнения Риккати, согласно которым существует глобальное решение  $v_0^{(m)}(t)$ , если

$$\frac{\varepsilon^2 (1 + 3\varepsilon v_e^3 M_0)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon v_e M_0}{L^2} \right)^2 \leq 1, \tag{70}$$

где в нашем случае

$$M_0 = \sup_{t \geq 0} |F_0 - 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0|.$$

Это решение  $v_0^{(m)} = v_{stn} + \varepsilon z(t)$  абсолютно непрерывно и  $z(t)$  удовлетворяет следующей оценке

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |z(t)| \leq (1 + 3\varepsilon^3 v_e M_0)^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon^3 v_e M_0}{L^2} \right). \tag{71}$$

Оценим  $M_0$  в этом случае. Начнем с

$$|H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})| \leq J_1 + J_2 + J_3,$$



где

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{k_1+k_2=0, |k_1| \leq m, k_1 \neq 0} 2v_{k_1}^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds \right\} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)}, \\
 J_2 &= -\frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=0, |k_1| \leq m, k_1 \neq 0} v_{k_1}^0 \left( e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} d\tau)} ds \right) \times \\
 &\quad \times \left( T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} ds \right), \\
 J_3 &= -\frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=0, |k_1| \leq m, k_1 \neq 0} v_{k_2}^0 \left( e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds} + ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} d\tau)} ds \right) \times \\
 &\quad \times \left( T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} - ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} ds \right).
 \end{aligned}$$

Имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon |T^{-1} Y_k^{(m)}(t)| &\leq \left| \int_0^t \frac{d}{ds} T^{-1} Y_k^{(m)}(s) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\gamma|}} \left\| \frac{d}{dt} T^{-1} Y_k^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)} \leq \\
 &\leq c_0 \sqrt{\varepsilon/\mu_0} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |J_1| &\leq 2c_0 \sqrt{\varepsilon/\mu_0} e^{-t\frac{1}{\varepsilon} \inf_{t \geq 0} \{L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^{(m)}|\}} \sum_{k_1+k_2=0, |k_1| \leq m, k_1 \neq 0} |v_{k_1}^0| \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)} \leq \\
 &\leq \frac{4}{\sigma-1} c_0 \sqrt{\varepsilon/\mu_0} e^{-t\frac{1}{\varepsilon} \inf_{t \geq 0} \{L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^{(m)}|\}} \left( \sum_{|k| \geq 1} |k|^\sigma |v_k^0| \right) \left( \sum_{1 \leq |k| \leq m} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
 \left| ik \int_0^t e^{-ik(t-s)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} ds \right| &= \left| e^{-ik(t-s)} T_k^{-1} Y_k^{(m)}(t) - \int_0^t e^{-ik(t-s)} \frac{d}{ds} T_k^{-1} Y_k^{(m)} s \right| \leq \\
 &\leq |T_k^{-1} Y_k^{(m)}(t)| + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \left\| \frac{d}{dt} T_k^{-1} Y_k^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} \leq 2c_0 \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$|\varepsilon J_2| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon/\mu_0} e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_0 t} \left( \sum_{|k| \geq 1} |k|^\sigma |v_k^0| \right) \left( \sum_{1 \leq |k| \leq m} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right)^{1/2},$$

где  $\inf_{t \geq 0} \{L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^{(m)}|\} > L_0 > 0$ . Таким образом

$$\varepsilon |H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0| \leq \sqrt{\varepsilon} c_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_0 t} \left( \sum_{|k| \geq 1} |k|^\sigma |v_k^0| \right) \left( \sum_{1 \leq |k| \leq m} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right)^{1/2}.$$



В силу (70), (71),

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} |z^{(m)}(t)| \leq (1 + 3\varepsilon^3 v_e M_0)^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon^3 v_e M_0}{L^2} \right),$$

где

$$M_0 = \left( \sum_{|k| \geq 1} |k|^\sigma |v_k^0| \right) \left( \sum_{1 \leq |k| \leq m} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right)^{1/2} + \sup_{t \geq 0} |F_0(t)|,$$

если

$$\frac{\varepsilon^2 (1 + 3\varepsilon v_e^3 M_0)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon v_e M_0}{L^2} \right)^2 \leq q < 1. \quad (72)$$

Здесь

$$L_0 > (L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^0|) - 5\varepsilon^3 v_e^{1/2} \max_{0 \leq s \leq \infty} |z_0^{(m)}| \geq \frac{1}{2} L_e,$$

если

$$\varepsilon^3 \max_{0 \leq s \leq \infty} |z_0^{(m)}| \leq \frac{1}{10v_e^{1/2}} (L_e - 10\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^0|).$$

Достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 (1 + 3\varepsilon^3 v_e M_0)^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon^3 v_e M_0}{L^2} \right) &\leq \frac{\varepsilon^3}{L_e^2} [\max(L_e^2, 1) + 12\varepsilon^3 v_e M_0]^3 \leq \\ &\leq \frac{1}{10v_e^{1/2}} (L_e - 10\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^0|) \end{aligned}$$

или

$$L_e - 10\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^0| > 0, \quad \varepsilon \max\{L_e^2, 1\} \leq \frac{1}{2(10)^{1/3} v_e^{1/6}}, \quad (73)$$

$$\varepsilon^4 M_0 \leq \frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}} L_e.$$

Точно также получим, что

$$\frac{\varepsilon^2 (1 + 3\varepsilon v_e^3 M_0)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon v_e M_0}{L^2} \right)^2 \leq \frac{4\varepsilon^2}{L_e^6} [\max\{L_e^2, 1\} + 12\varepsilon v_e^3 M_0]^6 \leq q,$$

если

$$\varepsilon^{4/3} M_0 \leq \frac{1}{12v_e^3} \left[ \left( \frac{q}{4} \right)^{1/6} L_e - \varepsilon^{1/3} \max\{L_e^2, 1\} \right].$$

Выберем  $\varepsilon$  так, чтобы выполнены неравенства (73) и

$$\varepsilon^{1/3} \max\{L_e^2, 1\} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{q}{4} \right)^{1/6} L_e.$$



Тогда условие разрешимости (72) выполнено, если

$$\varepsilon^{4/3} M_0 \leq \min \left\{ \frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}}, \frac{1}{24v_e^3} \left(\frac{q}{4}\right)^{1/6} \right\} L_e.$$

Таким образом, условие разрешимости (72) выполнено, если

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{5/6} \left( \left( \sum_{|k| \geq 1} |k|^\sigma |v_k^0| \right) \left( \sum_{1 \leq |k| \leq m} \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}^2 \right)^{1/2} + \sup_{t \geq 0} |F_0(t)| \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}}, \frac{1}{24v_e^3} \left(\frac{q}{4}\right)^{1/6} \right\} \frac{L_e}{\max \left\{ 16 \left(\frac{\varepsilon}{|\gamma|}\right)^{1/2}, 2\varepsilon^{1/2} \left(\frac{7}{3}\right)^2 \right\} \sqrt{2}}, \\ & \varepsilon^{3/4} \left[ \left( \sum_{|k| \geq 1} |k|^\sigma |v_k^0| \right) + \sup_{t \geq 0} |F_0(t)| \right] \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}}, \frac{1}{24v_e^3} \left(\frac{q}{4}\right)^{1/6} \right\} L_e. \end{aligned} \quad (74)$$

2. Теперь перейдем к оценке норм  $Y_k^{(m)}$ . Точно также оценивается  $H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k$ ,  $|k| \leq m$ ,  $k \neq 0$ . Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}^2 \leq \\ & \leq c_0 \frac{1}{L_0} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2|, |k| \leq m, k_1, k_2, k \neq 0} |v_{k_1}^0|^2 \|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}^2. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что:

$$\begin{aligned} & \|3v^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}}^2 \leq \\ & \leq c_0 \sup_{t \geq 0} |v_0^{(m)}(t)|^2 \|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}}^2. \end{aligned}$$

Оценим оставшиеся члены в правой части (67)

$$\begin{aligned} & 3v^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} D_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1}D^{(m)}, v_0^{(m)})_k, \\ & v_e^{1/2}\varepsilon (v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)}) ik v_k^0 [c_k^+(v_0^{(m)}) e^{ikt} + c_k^-(v_0^{(m)}) e^{-ikt}], \end{aligned}$$

где

$$v_\infty^{(m)} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_{\text{stn}}^{(m)}(t).$$

Здесь существенно, что мы рассматриваем модельный случай, когда предел  $v_\infty^{(m)}$  – константа. Такое условие, как мы уже отмечали, выполнено для модифицированной системы.

$$\|v_e^{1/2}\varepsilon (v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)}) (ik v_k^0 c_k^+(v_0^{(m)}) e^{ikt} + ik v_k^0 c_k^-(v_0^{(m)}) e^{-ikt})\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}}^2 \leq$$



$$\leq \varepsilon c_0 \left( 1 + \frac{\sup_{t \geq 0} \{L_e + 3\varepsilon^2 |v^{(m)}(t)\}}{\inf_{t \geq 0} \{L_e - 3\varepsilon^2 |v^{(m)}(t)\}} \right)^2 |v_k^0|^2 \|(v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)})\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}}^2,$$

если  $(v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)}) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ . Докажем этот факт. Для стандартного решения

$$\sup_{\tau \geq 0} e^\tau \left[ \left| \frac{d}{d\tau} v_{\text{stn}} \right| + |v_{\text{stn}}(\tau) - v_\infty^{\text{stn}}| \right] < \infty,$$

где  $v_{\text{stn}}^\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_{\text{stn}}(t)$ . Вернемся к уравнению для невязки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} (L_e - 3\varepsilon v_e^{1/2}(1 - v_{\text{stn}}))z^{(m)} &= \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} (z^{(m)})^2 + F_0(t), \\ z^{(m)}|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Потребуем чтобы  $\sup_{t \geq 0} e^{|\gamma|t} |f(t)| < \infty$ . Положим  $x = e^{|\gamma|t} z^{(m)}$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} x + (\tilde{w} + \tilde{u} + 4\tilde{v} - 3\varepsilon v_e^{1/2}(1 - v_{\text{stn}}) - \mu_2)x = \frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} e^{-|\gamma|t} x^2 + f_\gamma(t), \quad f_\gamma(t) = e^{|\gamma|t} F_0(t).$$

К этой задаче применимы процедуры доказательства существования глобального решения задачи (18). Приведенные там условия разрешимости и оценка решения в нашем случае

$$\frac{(1 + 3\varepsilon v_e M_0)^4}{L^2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon v_e M_0}{L^2} \right)^2 \leq 1$$

те же, поскольку коэффициент  $\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} e^{-\mu_2 t}$  при  $x^2$  убывает и, по построению, мы должны взять максимум  $3\varepsilon v_e^{1/2} e^{-\mu_2 t}$ , т.е. опять же получили  $3\varepsilon v_e^{1/2}$ . Тогда существует абсолютно непрерывное решение задачи (66), для которого справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} |x(t)| \leq (1 + 3\varepsilon v_e M_0)^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon v_e M_0}{L^2} \right).$$

Откуда следует требуемый результат  $\sup_{t \geq 0} e^{|\gamma|t} |z^{(m)}| < \infty$ .

### 3. Остались секулярные члены

$$\begin{aligned} I_{\text{sec}} &= -(\xi_k^{(m)} e^{ikt} + \eta_k^{(m)} e^{-ikt}) + \\ &+ \left( \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ + v_e^{1/2} \varepsilon v_\infty^{(m)} i k v_k^0 c_k^+(v_0^{(m)}) \right) e^{ikt} + \left( \frac{1}{\varepsilon} d_k^- + v_e^{1/2} \varepsilon v_\infty^{(m)} i k v_k^0 c_k^-(v_0^{(m)}) \right) e^{-ikt} \\ &- \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|,|k_2| \leq m, k_1, k_2 \neq 0} e^{i(k_2-k_1)t} \left( d_{k_1, k_2} + b_{k_1, k_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} \right), \end{aligned}$$

в которых предел  $v_\infty^{(m)}$  – константа.



Прежде всего определим  $2m$  начальных данных из  $4m$  данных  $u_k^0, w_k^0, |k| \leq m, k \neq 0$  в силу  $2m$  уравнений

$$\sum_{s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} \left( d_{s_1, s_2} + b_{s_1, s_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{s_2}^{(m)} \eta_{s_1}^{(m)} \right) = 0, \quad s_2 - s_1 = \pm 1, \dots, \pm m,$$

которые есть возмущение системы

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} d_{s_1, s_2} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} \left( 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 \right) \left( 2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 \right) = 0, \quad s_2 - s_1 = \pm 1, \dots, \pm m, \end{aligned} \quad (76)$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} b_{s_1, s_2} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} (s_1 v_{s_1}^0)(s_2 v_{s_2}^0) \int_0^\infty e^{is_1 t} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt \times \\ & \quad \times \int_0^\infty e^{-is_2 t} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} v_{s_1}^0 v_{s_2}^0 \left[ -1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty e^{is_1 t} (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt \right] \times \\ & \quad \times \left[ -1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty e^{-ik_2 t} (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)}) ds} dt \right] = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Систему же (76) из  $4m$  уравнений можно свести к  $2m$  уравнений

$$\begin{aligned} 2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 &= 0, \quad k_2 = \pm 1, \dots, \pm m, \\ 2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 &= 0, \quad k_1 = \pm 1, \dots, \pm m. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \zeta_k^+ &= \sum_{s_2-s_1=k, s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} (d_{s_1, s_2} + b_{s_1, s_2}), \quad k = 1, \dots, m, \\ \zeta_k^- &= \sum_{s_2-s_1=-k, s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2 \neq 0} (d_{s_1, s_2} + b_{s_1, s_2}), \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Теперь неизвестные постоянные  $\xi_k^{(m)}, \eta_k^{(m)}, k = 1, \dots, m$  найдем из следующего условия.



Условие несекулярности.

$$\begin{aligned}
 & -\xi_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ + v_e^{1/2} \varepsilon v_\infty^{(m)} i k v_k^0 c_k^+(v_0^{(m)}) - \varepsilon v_e^{1/2} \zeta_k^+ - \\
 & -\varepsilon^3 \frac{v_e^{1/2}}{u_e w_e} \sum_{s_2-s_1=k, s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2, s \neq 0} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \\
 & -\eta_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- + v_e^{1/2} \varepsilon v_\infty^{(m)} i k v_k^0 c_k^-(v_0^{(m)}) - \varepsilon v_e^{1/2} \zeta_k^- - \\
 & -\varepsilon^3 \frac{v_e^{1/2}}{u_e w_e} \sum_{s_2-s_1=-k, s_1+s_2=s, |s_1|, |s_2| \leq m, s_1, s_2, s \neq 0} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} = 0, \quad k = 1, \dots, m,
 \end{aligned} \tag{77}$$

где

$$|i k c_k^+(v_0^{(m)})| \leq 1 + \frac{\sup_{t \geq 0} \{L_e + 3v^{1/2} \varepsilon^2 |v_0^{(m)}|\}}{\inf_{t \geq 0} \{L_e - 3v^{1/2} \varepsilon^2 |v_0^{(m)}|\}}.$$

Оценим решение этой системы  $\xi_k^{(m)}, \eta_k^{(m)}$ .

**Лемма 9.** Пусть равномерно по  $m \geq 1$  имеем  $|a^{(m)}| \leq K_0$  и  $\|F_0^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}} \leq K_0$ . Тогда для  $\sigma > 1$  для достаточно малого  $\delta_0 > 0$  существует постоянная  $c_1 > 0$  такая, что равномерно по  $k \in Z_0$  и  $m \geq 1$  справедлива оценка

$$|\xi_k^{(m)}| + |\eta_k^{(m)}| \leq c_1 \left( |v_k^0| + \frac{A_k}{|k|^\sigma} \right), \quad A_k = \sum_{0 < |k| \leq m} |k|^\sigma |v_k^0|,$$

если

$$\varepsilon |v_0^0| A_k \leq \delta_0.$$

4. Решение  $Y^{(m)}$  системы (67) определим линейным уравнением

$$\begin{aligned}
 & Y^{(m)} + \varepsilon \mathcal{A} Y^{(m)} = G^{(m)} + F, \\
 & G_k^{(m)} = -D_k^{(m)} - 3v^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} T_k^{-1} Y D(m)_k - v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} + \\
 & \quad + 2\varepsilon v_e^{1/2} H(T^{-1} D^{(m)}, v_0^{(m)})_k, \\
 & \mathcal{A}_k Y_k^{(m)} = 3v^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + 2v_e^{1/2} H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k.
 \end{aligned} \tag{78}$$

Из полученных выше оценок следует, что функция  $F \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$  и что ограниченный оператор  $I + \varepsilon \mathcal{A}$  является малым возмущением тождественного. Тогда для достаточно малого  $\varepsilon$  у него существует ограниченный обратный  $(I + \varepsilon \mathcal{A})^{-1}$ . Решение вспомогательной задачи

$$y_k^{(m)} = T^{-1} (I + \varepsilon \mathcal{A})^{-1} (F_k) + T^{-1} (D_k^{(m)}). \tag{79}$$



Как видим, мы получили так называемое разложение решения по гладкости, поскольку

$$AT^{-1}(I + \varepsilon\mathcal{A})^{-1}(F_k) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+),$$

в то время как

$$AT^{-1}(D_k^{(m)}) \in L_\infty(R_+)$$

и эта функция не принадлежит  $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ .

Последнее, что нужно сделать, чтобы убедиться в справедливости неравенств (74), которые очевидно выполнено, если достаточно мала норма  $\|v^0\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ .

**Старшие моды.** Исследование линейной системы для  $|k| > m$  есть следствие результатов для вспомогательной задачи. В этом случае, очевидно, справедлива оценка:

$$\|(I - \Pi_m)v^{(m)}(t)\|_{H^0}^2 \leq c_0 \|(I - \Pi_m)v^{(m)}(0)\|_{H^0}^2, \quad t \in [0, T_{\max}^*).$$

## 9. Исследование нелинейного оператора

Теперь перейдем к исследованию нелинейной системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( L_e - \frac{3}{2} \varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)} \right) v_0^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} a_0^{(m)} &= G_0^{(m)} - \varepsilon A_0(Y^{(m)}) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0, \\ Y^{(m)} &= G^{(m)} - \varepsilon A(Y^{(m)}) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}), \\ \mathcal{A}(Y^{(m)}) &= Y^{(m)} + \varepsilon A(Y^{(m)}), \\ A(Y^{(m)}) &= 3v_e^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)}, \\ A_0(Y^{(m)}) &= 2v_e^{1/2} H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0, \quad \mathcal{B}_0(Y^{(m)}) = 2v_e^{1/2} B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0. \end{aligned} \tag{80}$$

Сначала рассмотрим

$$\mathcal{A}(Y^{(m)}) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) = G^{(m)} \tag{81}$$

при фиксированном  $v_0^{(m)}$ . Положим

$$A^{(m)} = \sum_{0 < |k| \leq m} |k|^{2\sigma} [\|G_k\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_k|^2 + |\eta_k|^2], \quad \sigma > 0.$$

и пусть постоянная  $b > 0$  определяется оценкой

$$\|3v_e^{1/2} T_k^{-1} Y_k^{(m,j)} + v_e^{1/2} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq b \|Y_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}.$$

**Лемма 10.** Пусть  $A^{(m)} < \infty$ . Тогда для любого  $m \geq 1$  билинейное уравнение (81) имеет решение  $Y^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+)$ , для которого равномерно по  $m$  и  $k$  справедлива оценка

$$\|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \left( 1 - \varepsilon^2 b^2 \left( \sup_{t \geq 0} |v_0^{(m)}| \right)^2 \right) \left( \|G_k\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \frac{A^{(m)}}{|k|^{2\sigma}} \right), \tag{82}$$



если

$$\left(1 - \varepsilon^2 b^2 \left(\sup_{t \geq 0} |v_0^{(m)}|\right)^2\right)^{-1} c_B^2 c_\sigma \varepsilon A^{(m)} \leq 1, \quad \sigma > \frac{1}{2}, \quad (83)$$

где  $c_\sigma = \sum_{k \in Z_0} \frac{1}{|k|^{2\sigma}} \leq 2/(2\sigma - 1)$ .

Доказательство Леммы 10 аналогично доказательству Леммы 8, из него следует существование решения нелинейного уравнения (81) и оценка решения при фиксированных  $v_0^{(m)}, \xi^{(m)}, \eta^{(m)}$ . Как мы показали выше, для билинейных операторов  $\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)})$  равномерно по  $m$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \\ & \leq c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k, 0 < |k_1|, |k_2|, |k| \leq m} [\|Y_{k_1}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] \times \\ & \quad \times [\|Y_{k_2}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2]. \end{aligned} \quad (84)$$

1) Фиксируем  $m$ . Тогда для итерации  $\mathcal{A}(Z^{(m,j)}) = G^{(m)} - \varepsilon \mathcal{B}(Z^{(m,j-1)}, Z^{(m,j-1)})$ ,  $j \geq 1$ ,  $Z_0^{(m,0)} = G^{(m)}$  справедлива оценка (82), поскольку

$$\begin{aligned} & \|Z_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 - \varepsilon \|\mathfrak{Z} v^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Z_k^{(m,j)} + v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Z_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \|G_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\ & + \varepsilon c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k, 0 < |k_1|, |k_2|, |k| \leq m} [\|Z_{k_1}^{(m,j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] \times \\ & \quad \times [\|Z_{k_2}^{(m,j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2]. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \left(1 - \varepsilon^2 b^2 \left(\sup_{t \geq 0} |v_0^{(m)}|\right)^2\right) \|Z_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \|G_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\ & + \varepsilon c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k, 0 < |k_1|, |k_2|, |k| \leq m} [\|Z_{k_1}^{(m,j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] \times \\ & \quad \times [\|Z_{k_2}^{(m,j-1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2]. \end{aligned}$$

В силу индукции

$$\|Z_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \left(1 - \varepsilon^2 b^2 \left(\sup_{t \geq 0} |v_0^{(m)}|\right)^2\right)^{-1} \left(\|G_k\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \frac{A^{(m)}}{|k|^{2\sigma}}\right).$$

Следовательно, последовательность итераций  $Z^{(m,j)}$ ,  $j \geq 0$  ограничена. Отсюда следует слабая сходимость  $Z^{(m,j)} \rightarrow Y^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+)$  при  $j \rightarrow \infty$ . В тоже время, мы имеем сильную сходимость  $T^{-1} Z^{(m,j)}$  в  $L_{2,\gamma;0 > \gamma > -\mu\varepsilon}(R_+)$  и в  $C_B(R_+)$ . Тогда последовательность

$$\left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Z_{k_1}^{(m,j)} ds\right) \left(ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Z_{k_2}^{(m,j)} ds\right)$$



сходится к

$$\left( ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} ds \right)$$

для всех  $t \in R_+$ . Отсюда, из структуры оператора  $\mathcal{B}$  и оценки его частей (см. раздел 5) последовательность

$$\varepsilon \left( 3v^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Z_k^{(m,j)} + v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Z_k^{(m,j)} + \mathcal{B}(Z^{(m,j-1)}, Z^{(m,j-1)}) \right)$$

сходится поточечно к

$$\varepsilon \left( 3v^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) \right)$$

для всех  $t \in R_+$ . Таким образом, для почти всех  $t \in R_+$  имеет место

$$\mathcal{A}(Y^{(m)}) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) = G^{(m)}.$$

Следовательно, существует решение  $Y^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+)$ , для которого справедлива оценка (82) при условии (83) и фиксированном  $v_0^{(m)}$ .

2) Используя существование глобального решения вспомогательной задачи для правых частей специального вида, мы доказали обратимость оператора  $\mathcal{A}(Y^{(m)})$  в  $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$  и ограниченность решения

$$\begin{aligned} \sum_{0 < k \leq m} |k|^\sigma (|\xi_k^m| + |\zeta_k^m|) + \|Y^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \|v_0^{(m)} - v_{stn}^{(m)}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)} &\leq & (85) \\ &\leq c_0 [\|F\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + |v^0|_{H^\sigma(0,2\pi)}], \quad \sigma > 1. \end{aligned}$$

в случае  $a_0^{(m)}(t) = \text{const}$ .

Теперь рассмотрим систему (86). Метод итераций дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z_n^0 + \frac{1}{\varepsilon} \left( L_e - \frac{3}{2} \varepsilon^2 v_e^{1/2} z_n^0 \right) z_n^0 + 2\varepsilon v_e^{1/2} a_0^{(m)} &= G_0^{(m)} - \varepsilon A_0(z_n) - \varepsilon \mathcal{B}(z_{n-1}, z_n)_0, \\ z_n &= G^{(m)} - \varepsilon A(z_n) - \varepsilon \mathcal{B}(z_{n-1}, z_n). \end{aligned} \quad (86)$$

Те же рассуждения, что и для модельной задачи, позволяют и в случае  $a_0^{(m)}(t)$  — гладкой функции получить оценку (85) для решения системы (86) с точностью до  $O(m^{-1})$  (см. раздел 7). Достаточно потребовать  $\sigma > 2$ , чтобы в этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{0 < k \leq m} |k|^{\sigma-1} (|\xi_n^k| + |\eta_n^k|) + \|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \|z_n^0 - v_{stn}^{(m)}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)} + \|a_0^{(m)}\|_{H_b^1(R_+)} &\leq \\ &\leq c_0 \left( \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \varepsilon_{CH} \|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \right) \end{aligned}$$



$$+ \varepsilon c_B \|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + |v^0|_{H^\sigma(0,2\pi)} \Big),$$

где  $v_{\text{stn}}^{(m)}(t)$  определяются функцией  $a^{(m)}(t) = \sum_{0 < |k| \leq m} c_k e^{ikt}$ , норма которой  $\|a_0^{(m)}\|_{H_b^1(R_+)} = \sum_{0 < |k| \leq m} |k| |c_k|$ . Выберем  $M_0$  такое, что

$$\frac{\|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}}{1 - \varepsilon(c_H + c_B M_0)} \leq M_0,$$

т.е.

$$\varepsilon c_B M_0^2 - M_0(1 - \varepsilon c_H) + \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leq 0.$$

Возьмем

$$M_0 = \frac{2\|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}}{(1 - \varepsilon c_H) + \sqrt{(1 - \varepsilon c_H)^2 - 4\varepsilon c_B \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}}}$$

и  $\varepsilon$  выберем из условия, что

$$(1 - \varepsilon c_H)^2 - 4\varepsilon c_B \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} > 0.$$

Тогда для любого  $n \geq 0$

$$\|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leq M_0.$$

Выразим разность между двумя приближениями следующим образом

$$(z_n - z_{n-1}) = \varepsilon \mathcal{H}(z_n - z_{n-1}) + \varepsilon [\mathcal{B}(z_{n-1}, z_n) - \mathcal{B}(z_{n-2}, z_{n-1})].$$

Если справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}(Z^{(m)}, Y^{(m)})\|_{L_2} \leq c_B (\|Y^{(m)}\|_{L_2} + \|v^0\|_{H^\sigma}) (\|Z^{(m)}\|_{L_2} + \|v^0\|_{H^\sigma}), \quad (87)$$

то

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}(z_{n-1}, z_n) - \mathcal{B}(z_{n-2}, z_{n-1})\| \leq \\ & \leq c_B \|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} (\|z_n - z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \|z_{n-1} - z_{n-2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}) . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|z_n - z_{n-1}\|_H & \leq \varepsilon c_0 (c_H + c_B (\|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \|v^0\|)) \|z_n - z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \\ & + \varepsilon c_0 c_B (\|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \|v^0\|_{L_2(0,2\pi)}) \|z_{n-1} - z_{n-2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}, \end{aligned}$$

если равномерно  $\|z_j\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leq M_0$ , то

$$\|z_n - z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leq \frac{\varepsilon c_0 c_B (M_0 + \|v^0\|_{L_2(0,2\pi)})}{1 - \varepsilon c_0 (c_H + c_B (M_0 + \|v^0\|_{H^\sigma}))} \|z_{n-1} - z_{n-2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}.$$

При этом должно быть выполнено условие

$$\frac{\varepsilon c_0 c_B (M_0 + \|v^0\|_{H^\sigma})}{(1 - \varepsilon c_0 (c_H + c_B (M_0 + \|v^0\|_{H^\sigma})))} < q < 1.$$



Отсюда следует сходимость  $z_n$  в  $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$  к решению  $Y^{(m)} \in H$  задачи (86).

Выбор постоянной  $M_0$ . Последнее, что нам осталось сделать – обосновать равномерный по  $n$  (и, соответственно, независимо от  $v_0^{(m)}$ ) выбор постоянной  $M_0$ . Для этого нам нужно оценить правую часть  $G_k$ . Очевидно, все определяется оценкой  $G_k(v_0^{(m)})$  для  $v_0^{(m)} = v_{\text{stn}}$ . Тогда постоянную  $M_0$  можно определить, например, по  $2\|G(v_{\text{stn}})\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}$ .

### 10. Обоснование галеркинских приближений

Построенные нами решения задачи (25), (26), (27) имеют следующую структуру

$$v_0^{(m)}(t) = v_{\text{stn}}^{(m)}(t) + z_0^{(m)}(t),$$

где  $v_{\text{stn}}^{(m)}(t)$  определяются функцией  $a^{(m)}(t)$ .

$$v_k^{(m)}(t) = v_k^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (4v_e + u_e + w_e + 4\varepsilon v_e^{1/2} v_0^{(m)}(s)) ds \right\} + \xi_k^{(m)} D_k^+ + \eta_k^{(m)} D_k^- + Y_k^{(m)}(t).$$

**Теорема 3.** Пусть  $\sigma > 2$  и  $v(0) \in H^\sigma$  и выполнены условия Предложения 2. Тогда существует подпоследовательность  $v_k^{(m)}(t)$ ,  $k \in Z$  (которую будем обозначать также) решений задачи (25), (26), (27) с тем же начальными данными  $v(0) \in H^\sigma$  такое, что  $v_0^{(m)}(t)$  и  $v_k^{(m)}(t)$ ,  $k \in Z_0$  сходятся строго в  $C_B(R_+)$  и  $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$  соответственно и слабо в  $W_\infty^1(R_+)$  и  $W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)$  к функциям  $v_0^\infty(t)$  и  $v_k^\infty(t)$ ,  $k \in Z_0$ ;  $v_0^\infty(t)$ ,  $v_k^\infty(t)$ ,  $k \in Z_0$  являются решением задачи (8) (в смысле определения (24)) для почти всех  $t \in R_+$ , с ограниченными нормами

$$\|v_0^\infty(t) - v_{\text{stn}}^\infty(t)\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)} \leq M_\sigma |v^0|_{H^\sigma}, \quad \|\Xi^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}}, \|\Upsilon^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}} \leq c_0 \|v^0\|_{H^\sigma},$$

$$\|v^\infty(t) - \xi^\infty D^+ - \eta^\infty D^-\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+;A)} \leq M_\sigma |v_k^0|_{H^\sigma},$$

с постоянной  $M_\sigma$  не зависящей от  $k \in Z$ .

□ 1) Постоянные  $\xi_k^{(m)}$ ,  $\eta_k^{(m)}$  равномерно ограничены

$$\|\Xi^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}}, \|\Upsilon^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}} \leq c_0 \|v^0\|_{H^\sigma},$$

где  $\|v^0\|_{H^\sigma} = \sum_{k \neq Z_0} |k|^\sigma |v_k^0|$ ,  $\|\Xi^{(m)}\|_{H^s} = \sum_{k=1}^m |k|^s |\xi_k^{(m)}|$ ,  $\|\Upsilon^{(m)}\|_{H^s} = \sum_{k=1}^m |k|^s |\eta_k^{(m)}|$ . Откуда следует существование предельных постоянных векторов

$$\Xi^{(m)} \rightarrow \Xi^\infty, \quad \Upsilon^{(m)} \rightarrow \Upsilon^\infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

и

$$a^{(m)}(t) \rightarrow a^\infty(t) = \frac{\varepsilon^3}{v_e^{3/2}} \sum_{0 < |k| \leq m} (\Xi^\infty, \Upsilon^\infty) e^{i(k_2 - k_1)t} \quad \text{в } H_B^1(R_+).$$

Тогда

$$v_{\text{stn}}^{(m)}(t) \rightarrow v_{\text{stn}}^\infty(t) \quad \text{в } C_B^1(R_+),$$



где  $\|y\|_{C_B^1(R_+)} = \sup_{t \geq 0} \left[ |y(t)| + \left| \frac{d}{dt} y \right| \right]$ , и справедлива равномерная по  $m$  оценка

$$\|v_0^{(m)}(t) - v_{stn}^{(m)}(t)\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+)}^2 + \sum_{k=1}^m \|Y_k^{(m)}\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+;A)}^2 \leq c_0 \|v^0\|_{H^\sigma}^2.$$

2) Теперь покажем, что  $Y_k^{(m)} \rightarrow Y_k^\infty$  в  $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ . Из равномерной ограниченности ограниченность норм  $\|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}$  следует слабая сходимость  $Y_k^{(m)} \rightarrow Y_k^\infty$  при  $m \rightarrow \infty$ . В тоже время, мы имеем сильную сходимость  $T^{-1}D_k^{(m)}$  в  $W_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+)$  и в  $C_B(R_+)$ . Отсюда следует сильная сходимость  $B_*(D^{(m)}, D^{(m)}) \rightarrow B_*(D^\infty, D^\infty)$  и  $B_*(Y^{(m)}, D^{(m)}) \rightarrow B_*(Y^\infty, D^\infty)$  в  $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ . К тому же последовательность

$$\left( ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^{(m)} ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^{(m)} ds \right)$$

сходится к

$$\left( ik_1 \int_0^t e^{ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} Y_{k_1}^\infty ds \right) \left( ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} Y_{k_2}^\infty ds \right)$$

поточечно для всех  $t \in R_+$ . Отсюда

$$A(Y^\infty) - \varepsilon \mathcal{B}(Y^\infty, Y^\infty) = G^\infty$$

для почти всех  $t \in R_+$ .

Тогда с силу (81) имеем

$$(Y^{(m)} - Y^\infty) = -\varepsilon A(Y^{(m)} - Y^\infty) + \varepsilon (\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) - \mathcal{B}(Y^\infty, Y^\infty)) + (G^{(m)} - G^\infty),$$

где  $\|(G^{(m)} - G^\infty)\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} \rightarrow 0$  когда  $m \rightarrow \infty$  и

$$\begin{aligned} \|\varepsilon A(Y^{(m)} - Y^\infty) + \varepsilon (\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) - \mathcal{B}(Y^\infty, Y^\infty))\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} &\leq \\ &\leq \varepsilon^{1/2} C_0 \|(Y^{(m)} - Y^\infty)\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}. \end{aligned}$$

Отсюда, для достаточно малого  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , следует сильная сходимость  $Y_k^{(m)} \rightarrow Y_k^\infty$  в  $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$  для любого  $|k| \geq 1$ . В тоже время, получим, что  $z^{(m)} = v_0^{(m)}(t) - v_{stn}^{(m)}(t) \rightarrow z^\infty$  в  $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$  и слабо в  $W_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+;A)}$  к функции  $z^\infty \in W_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}^1(R_+;A)}$ .

3) Теперь покажем, что функции

$$v_0^\infty(t) = v_{stn}^\infty(t) + z^\infty(t),$$

$$v_k^\infty(t) = v_k^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3ve^2 v_e^{1/2} v_0^\infty(s)) ds \right\} + \xi_k^\infty D_k^+ + \eta_k^\infty D_k^- + T_k^{-1} Y_k^\infty(t), \quad k \in Z_0$$

являются решением задачи (70), (23) в смысле определения (24) ( $D_k^\pm = T_k^{-1}(e^{\pm ikt})$ ).



Для  $v_0^{(m)}$  имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} v_0^{(m)}(t) + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0^{(m)}(t) - v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \frac{3}{2} (v_0^{(m)})^2 + \right. \\ & \left. + 2\Pi_m \sum_{k_1+k_2=0} (\Pi_m v_{k_1}^{(m)} \Pi_m v_{k_2}^{(m)} - \Pi_m u_{k_1}^{(m)} \Pi_m w_{k_2}^{(m)}) \right] = -2v_e^{1/2} \varepsilon \mathcal{O}_0^{(m)}, \\ \mathcal{O}_0^{(m)} = & 2v_e^{1/2} \varepsilon \sum_{m < |k| \leq 2m, k \neq 0} h_k e^{ikt} + 3v_e^{1/2} \varepsilon \sum_{|k_1+k_2|^2 > m, |k_1|, |k_2|} c_{k_1} c_{k_2} e^{ikt} = O(m^{-1}), \end{aligned} \quad (88)$$

где

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} |\mathcal{O}_0^{(m)}| & \leq \left( \sum_{m < |k| \leq 2m} |h_k| + 3v_e^{1/2} \varepsilon \sum_{|k_1+k_2| \geq m, |k_1|, |k_2| \leq m} |c_{k_1}| |c_{k_2}| \right) \leq \\ & \leq C_1 \sum_{|k| \geq m} |k|^\sigma |v_k^0| = O(m^{-1}). \end{aligned}$$

Далее, второе уравнение в (24) запишем в более удобной нам форме

$$\begin{aligned} Y_k^{(m)}(t) + D_k^{(m)}(t) = & v_k^0 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) d\tau \right\} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} + \\ & + \varepsilon v_e^{1/2} d_k(t) + v_e^{1/2} \varepsilon \Pi_m \mathcal{K}_k(\Pi_m v^{(m)}, \Pi_m v^{(m)}) + \mathcal{O}_k^{(m)}, \end{aligned} \quad (89)$$

$$\mathcal{O}_k^{(m)} = -2\varepsilon v_e^{1/2} S_1^{(m)}(t) = \sum_{|k| \geq m} s_k^{(m)} e^{ikt} = O(m^{-1}).$$

Положим  $\Pi_{-m} = I - \Pi_m$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} v_0^\infty(t) + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0^\infty(t) + v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \frac{3}{2} (v_0^\infty)^2 + \sum_{k_1+k_2=0} (v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty - u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty) \right] = \\ = & -v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \frac{3}{2} (v_0^\infty + v_0^{(m)})(v_0^\infty - v_0^{(m)}) + \Pi_m \sum_{k_1+k_2=0} (\Pi_m (v_{k_1}^\infty - v_0^{(m)}) \Pi_m v_{k_2}^\infty - \Pi_m (u_{k_1}^\infty - u_{k_1}^{(m)}) \Pi_m w_{k_2}^\infty) \right] + \\ + & \frac{1}{\varepsilon} L_e (v_0^\infty(t) - v_0^{(m)}) - v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \Pi_m \sum_{k_1+k_2=0} (\Pi_m v_0^{(m)} \Pi_m (v_{k_2}^\infty - v_{k_2}^{(m)}) - \Pi_m u_{k_1}^{(m)} \Pi_m (w_{k_2}^\infty - v_{k_2}^{(m)})) \right] + \\ & + \frac{d}{dt} v_0^\infty(t) - \frac{d}{dt} v_0^{(m)} + v_e^{1/2} \varepsilon \Pi_{-m} \left[ \sum_{0 < |k| \leq m} (\Pi_m v_k^\infty \Pi_m v_{-k}^\infty - \Pi_m u_k^\infty \Pi_m w_{-k}^\infty) \right] + \\ & + v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \sum_{k_1+k_2=0} (\Pi_{-m} v_{k_1}^\infty \Pi_m v_{k_2}^\infty - \Pi_{-m} u_{k_1}^\infty \Pi_m w_{k_2}^\infty) \right] + \\ & + v_e^{1/2} \varepsilon \Pi_m \left[ \sum_{k_1+k_2=0} (\Pi_m v_{k_1}^\infty \Pi_{-m} v_{k_2}^\infty - \Pi_m u_{k_1}^\infty \Pi_{-m} w_{k_2}^\infty) \right] + 2v_e^{1/2} \varepsilon \mathcal{O}_0^{(m)}. \end{aligned}$$



Для фиксированного  $k$  имеет место

$$\begin{aligned}
 & Y_k^\infty(t) + D_k^\infty(t) - v_k^0 T_k(e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^\infty) d\tau}) = \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} + \varepsilon v_e^{1/2} d_k(t) \\
 & + v_e^{1/2} \varepsilon \left( 3v_0^\infty v_k^\infty + v^\infty \right) A_k^{(1)} v_k^\infty + 2[B(v^\infty, v^\infty)_k + H v^\infty]_k \\
 & + Y_k^\infty(t) - Y_k^{(m)}(t) + D_k^\infty(t) - D_k^{(m)}(t) + v_k^0 T_k[e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) d\tau} - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^\infty) d\tau}] \\
 & - v_e^{1/2} \varepsilon \Pi_{-m} \mathcal{K}_k(v^\infty, v^\infty) - v_e^{1/2} \varepsilon \Pi_m \mathcal{K}_k(\Pi_{-m} v^\infty, v^\infty) - v_e^{1/2} \varepsilon \Pi_m \mathcal{K}_k(\Pi_m v^\infty, \Pi_{-m} v^\infty) \\
 & + v_e^{1/2} \varepsilon \left( 3(v^{(m)} - v_0^\infty) \Pi_m v_k^\infty + 3v^{(m)} \Pi_m (v_k^\infty - v_k^{(m)}) + v_e^{1/2} \varepsilon (v_0^{(m)} - v^\infty) A_k^{(1)} v_k^\infty + v_0^{(m)} A_k^{(1)} (v_k^\infty - v^\infty) \right. \\
 & \left. + 2\Pi_m [B(v^{(m)}, v^\infty)_k + B(v^{(m)}, v^{(m)} - v^\infty)_k + H(v^{(m)} - v^\infty)_k] \right) + \mathcal{O}_k^{(m)}.
 \end{aligned}$$

Здесь важно отметить, что  $T_k^{-1} \mathcal{O}_k^{(m)}$  не принадлежит  $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ .

Теперь отметим, что  $\Pi_{-m} v_k^\infty$  — это предел решений  $v_k^{(m)}$ ,  $|k| > m$ , задачи (27), для которых очевидна оценка

$$\|v_k^{(m)}\|_{W_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}} \leq c_0 |v_k^0| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Из полученных выше оценок следует, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} v_0^\infty(t) + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0^\infty(t) = -v_e^{1/2} \varepsilon \left[ \frac{3}{2} (v_0^\infty)^2 + 2 \sum_{k_1+k_2=0} (v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty - u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty) \right], \\
 & T_k v_k^\infty(t) - v_k^0 T_k e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v^{1/2} v_0^\infty) d\tau} = v_e^{1/2} \varepsilon \mathcal{K}_k(v^\infty, v^\infty), \quad k \in Z_0.
 \end{aligned} \tag{90}$$

в смысле интегрального тождества

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} v_0^\infty(t) + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0^\infty(t) + v_e^{1/2} \varepsilon \left( \frac{3}{2} (v_0^\infty)^2 + 2 \sum_{k_1+k_2=0} (v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty - u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty) \right) \right] \psi dt = 0, \\
 & \int_0^\infty [T_k v_k^\infty(t) - v_k^0 T_k e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v^{1/2} v_0^\infty) d\tau} - v_e^{1/2} \varepsilon \mathcal{K}_k(v^\infty, v^\infty)] \varphi dt = 0,
 \end{aligned}$$

для любой  $\psi, \varphi(t) \in C_0^\infty(R_+)$ . ■

**Замечание.** Для комплексификации (6) мы получаем точное решение (24), поскольку в этом случае поправка  $a^{(m)}$  в уравнении Риккати является константой и условие несикулярности позволяет точно решить систему для  $k$  мод,  $|k| \geq 1$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\sigma > 1$  и  $v(0) \in H^\sigma$  и выполнены условия Предложения 1 для комплексификации (6). Тогда существует подпоследовательность  $v_k^{(m)}(t)$ ,  $k \in Z$  (которую будем обозначать также) решений задачи (25), (26), (27) с тем же начальными данными



$v(0) \in H^\sigma$  такое, что  $v_0^{(m)}(t)$  и  $v_k^{(m)}(t)$ ,  $k \in Z_0$  сходятся строго в  $C_B(R_+)$  и  $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$  соответственно и слабо в  $W_\infty^1(R_+)$  и  $W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)$  к функциям  $v_0^\infty(t)$  и  $v_k^\infty(t)$ ,  $k \in Z_0$ ;  $v_0^\infty(t), v_k^\infty(t), k \in Z_0$  являются решением задачи (8) (в смысле определения (24)) для всех  $t \in R_+$ , с ограниченными нормами

$$\|v_0^\infty(t) - v_{\text{stn}}^\infty(t)\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+)} \leq M_\sigma |v^0|_{H^\sigma}, \quad \|\Xi^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}}, \|\Upsilon^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}} \leq c_0 \|v^0\|_{H^\sigma},$$

$$\|v^\infty(t) - \xi^\infty D^+ - \eta^\infty D^-\|_{W_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}^1(R_+;A)} \leq M_\sigma |v_k^0|_{H^\sigma},$$

с постоянной  $M_\sigma$  не зависящей от  $k \in Z$ .

□ В этом случае  $a^{(m)}$  – константа. Секулярные члены в уравнении для  $k$ - моды возникают только для пар  $k_1 + k_2 = k$ , т.е. для той же моды. Поэтому условиями секулярности можно убрать осциллирующие члены в правой части приближения Галеркина. Отсюда следует, что функции  $v_k^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}$ ,  $|k| \leq m$ ,  $k \neq 0$ . Также  $(v_k^{(m)}(t) - v_{\text{stn}}^{(m)}(t)) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}$  и  $v_{\text{stn}}^{(m)}(t) \rightarrow v^+(a^{(m)})$  при  $t \rightarrow +\infty$  стабилизируется к предельной константе однородного уравнения Риккати, определяемой постоянной  $a^{(m)}$ . Из полученных выше оценок для комплексификации (6) следуют предельные уравнения

$$Y_k^\infty(t) + D_k^\infty(t) - v_k^0 T_k(e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_\varepsilon + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^\infty) d\tau}) = \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^- e^{-ikt} + \varepsilon v_e^{1/2} d_k(t) + v_e^{1/2} \varepsilon \left( 3v_0^\infty v_k^\infty + v_0^\infty A_k^{(1)} v_k^\infty + 2[B(v^\infty, v^\infty)_k + H(v^\infty)_k] \right),$$

$$v_0^\infty(t) - v_0^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon t} = -v_e^{1/2} \varepsilon \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon (t-s)} \left[ \frac{3}{2} (v_0^\infty)^2 + 2 \sum_{k_1+k_2=0} (v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty - u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty) \right] ds$$

для всех  $t \in R_+$ . ■

Как следствие этих результатов получаем

**Теорема 5.** Пусть  $\sigma > 2$ , начальные данные  $v^0 \in H^\sigma(0, 2\pi)$ , и выполнены условия Предложения 2 (условие несекулярности, законы сохранения для начальных данных и условия малости нормы  $\|v^0\|_{H^\sigma}$ ). Тогда построенное решение системы (25), (26), (27) является глобальным классическим решением задачи (4) в малой окрестности точки равновесия и удовлетворяет системе почти всюду. Из за осцилляции во времени  $v_{\text{stn}}$  нулевая мода функции  $v(x, t)$  осциллирует так же как и нулевые моды функций  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\sigma > 1$ , начальные данные  $v^0 \in H^\sigma(0, 2\pi)$ , выполнены условия Предложения 1 (условие несекулярности, законы сохранения для начальных данных и условия малости нормы  $\|v^0\|_{H^\sigma}$ ). Тогда построенное решение системы (25), (26), (27) для системы (6) является глобальным классическим решением этой задачи в малой окрестности точки равновесия и удовлетворяет системе для всех  $t \in R_+$ . Функция  $v(x, t)$  стабилизируется к константе. Осцилляции в противофазе на больших временах функций  $u(x, t), w(x, t)$  остается за счет интегро-псевдодифференциальных членов в уравнениях состояния.



**Заключение.** Можно сделать следующие выводы.

1. В построенном решении задачи Коши для системы (6), для вещественных начальных данных, функция  $a^{(m)}(t)$  равномерно по  $t$  сходится при  $m \rightarrow +\infty$  к постоянной. Поэтому функция  $v(x, t)$  стабилизируется к константе, возможно не равной нулю, а функции  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  осциллируют при больших значениях  $t$  в противофазе. Остается вопрос о том, совпадают ли построенные решение для задачи Коши для систем (4) и (6) для одних и тех же начальных вещественных данных. Проблеме единственности слабого решения как для модели (4), так и модели (6), в более общей ситуации  $\sigma \geq 0$  будет посвящена ближайшая публикации.

2. В этой статье мы рассмотрели модели типа Бродуэлла [2] (дискретных уравнений Больцмана, см. [1]) спонтанной потери симметрии. Часто хиральная специфичность биоорганического мира воспринимается как феномен нарушения зеркальной симметрии, проявляющийся в существовании жизни [3], [4]. Сразу возникает вопрос, а где именно искать причины нарушения симметрии—в ходе химической, предбиологической или же биологической эволюции. Интуитивно эти этапы молекулярной эволюции представляются различными, но какими бы они не были, они привели к возникновению уникального полимерного мира—гомохиральных молекул, обладающих удивительными структурными и функциональными свойствами. Ключевой является проблема—как возникли гомохиральные молекулы, сложность которых адекватна сложности информационных и функциональных носителей в биологии? Ответ на этот вопрос во многом, если не во всем, может определить подход и к вопросу о причинах нарушения зеркальной симметрии биосферы в целом [3]. Но потеря симметрии—это не только природа биологической среды. Многие эффекты неравновесности неорганического мира, как например ликвация [15] (начальная стадия разделения на фазы в жидкостях, сплавах и даже газах) можно смоделировать как спонтанную потерю симметрии (классическая триада Ван дер Ваальса—двух устойчивых зон и одной неустойчивой). Эти факты определяют интерес к моделям потери зеркальной симметрии.

3. Все полученные результаты переносятся на двумерную и трехмерную модели (1), приведенные в [1]. Естественно, технически это намного сложнее, но суть одна. Полученные результаты позволяют выдвинуть дерзкую гипотезу о структуре решения кинетического уравнения Больцмана в окрестности распределения Максвелла. На больших временах для парных взаимодействий возмущения распределения Максвелла имеют локальный аттрактор, размерность которого равна числу законов сохранения, и диссипация определяется бесконечномерным уравнением Риккати, имеющим сепаратрисное решение.

## Литература

1. Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи МН(1971). – т. XXVI, в. 3(159), стр. 3-51.
2. Broadwell T.E. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method // J. of Fluid Mechanics. – 1964. – 19:3.



3. Аветисов В.А., Гольданский В.И. Физические аспекты нарушения зеркальной симметрии биоорганического мира // Успехи Ф.Н. – 166;8. – С.73-891.
4. Chirality: from the weak Bozon to  $\alpha$ -Helix / Ed. R. Janoschek. – New York: Springer-Verlag, 1991.
5. Boltzmann L. On the Maxwell method to the reduction of hydrodynamic equations from the kinetic gas theory / Rep. Brit. Assoc (1894) in the L. Boltzmann memories, v.2/ М.: Nauka, 1984. – P.307-321. [in Russian].
6. Radkevich E.V. Mathematical Aspects of Nonequilibrium Processes / Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2007. [in Russian].
7. Gurtin M.E., Pipkin A.C. Theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – 31. – P.113-126.
8. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова // В.В. Веденяпин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
9. Chapman S., Cowling T. Mathematical Theory on Non-uniform Gases / S. Chapman. – Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
10. Chen G.Q., Levermore C.D., Lui T.P. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy // Commun. Pure Appl. Math. – 1994. – 47;6. – P.787-830.
11. Palin V.V., Radkevich E.V. Mathematical aspects of the Maxwell problem // Applicable Analysis. – 2009. – 88;8. – P.1233-1264.
12. Radkevich E.V. Problems with insufficient information about initial-boundary data // Advances in Mathematical Fluid Mechanics/ Special AMFM Volume in Honour of Professor Kazhikhov / Volume editor(s): A. Fursikov, G.P. Galdi, V. Pukhnachov / Birkhauser Verlag, 2009. – P.347-376.
13. Palin V.V., Radkevich E.V. Hyperbolic Regularizations of Conservation Laws // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2008. – 15;3. – P.343-363.
14. Babin A.V., Ilyin A.A., Titi E.S. On the regularization mechanism for the periodic KdV equation // Comm. on Pure and Appl.Math. – 2011. – LXIV, 0591-0648.
15. Radkevich E.V. On structures in instability zones // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 165;1.

## OSCILLATIONS GENERATED BY INTERACTION OPERATOR IN DISCRETE KINETIC EQUATIONS

E.V. Radkevich

Moscow State University,  
V-899, Moscow, 119899, Russia, e-mail: [evrad07@gmail.com](mailto:evrad07@gmail.com)

**Abstract.** It is proved the existence of global solution of discrete kinetic equations. Besides, it is obtained its expansion according to smoothness and it is studied the influence of oscillations generated by interaction operator.

**Key words:** kinetic equation, global solution, interaction operator, circular terms.



УДК 517.95

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Г.Ю. Удалова <sup>16)</sup>

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,  
ул. Молодогвардейская, 194, Самара, 443001, Россия, e-mail: [yeyeg@yandex.ru](mailto:yeyeg@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе изучена задача для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа в прямоугольной области с разными неизвестными правыми частями. Установлен критерий единственности решения этой обратной задачи. Само решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Доказана устойчивость решения по граничным функциям.

**Ключевые слова:** уравнение смешанного типа, обратная задача, спектральный метод, единственность, существование, устойчивость.

**1. Введение.** Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе с разными неизвестными правыми частями

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0; \\ f_2(x), & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $\alpha, \beta$  – заданные положительные числа, и связанную с ним следующую задачу.

**Обратная задача.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$ , удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+), \quad f_i(x) \in C(0, 1) \cap L[0, 1]; \quad (2)$$

$$Lu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (5)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad u_y(x, \beta) = h(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

где  $\psi(x), \varphi(x), g(x), h(x)$  – заданные достаточно гладкие функции,  $\psi'(0) = \psi'(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ .

Вопросы разрешимости обратных задач для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались в работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2], В.К. Иванова [3] и др. Подробная библиография работ, посвященных теории

<sup>16</sup>Удалова Г.Ю., ассистент Самарского государственного архитектурно-строительного университета.



обратных задач, приведена в монографии А.М. Денисова [4].

К.Б. Сабитов [5] предложил новый подход для обоснования существования и единственности решения прямых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольной области - метод спектральных разложений. Этим методом изучены обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа [6] – [8] и эллипτικο-гиперболического типа [9] – [12].

В настоящей работе в отличие от работ [9] – [12] изучается обратная задача (2) – (6) для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа (1) с разными правыми частями и граничными условиями второго рода. Установлен критерий единственности решения задачи, и само решение построено в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Отметим, что аналогичная задача для уравнения (1) в случае  $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$  изучена в работе [12].

**2. Критерий единственности решения задачи.** Разделяя переменные в уравнении (1) при  $f(x, y) \equiv 0$ , получим относительно функции  $X(x)$  спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (7)$$

$$X'(0) = X'(1) = 0, \quad (8)$$

где  $\mu$  – постоянная разделения. Задача (7), (8) имеет следующую систему собственных чисел и собственных функций:

$$\sqrt{\mu_k} = \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$X_0(x) = 1, \quad X_k(x) = \sqrt{2} \cos \pi k x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Система (9) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Пусть существует решение задачи (2) – (6). Будем искать его в виде суммы ортогональных рядов:

$$u(x, y) = u_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \cos \pi k x, \quad (10)$$

$$f_i(x) = f_{i,0} + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,k} \cos \pi k x, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

где

$$u_0(y) = \int_0^1 u(x, y) dx, \quad (12)$$

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \pi k x dx, \quad k \in N, \quad (13)$$

$$f_{i,0} = \int_0^1 f_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$



$$f_{i,k} = \sqrt{2} \int_0^1 f_i(x) \cos \pi kx \, dx, \quad i = 1, 2, \quad k \in N. \quad (15)$$

На основании (12) и (13) введем следующие вспомогательные функции:

$$u_{0,\varepsilon}(y) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \, dx, \quad (16)$$

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \cos \pi kx \, dx, \quad k \in N. \quad (17)$$

Дважды дифференцируя функции (16) и (17) при  $y > 0$  и  $y < 0$  и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{0,\varepsilon}(y) = \begin{cases} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy} \, dx = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_1(x) \, dx - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \, dx, & y > 0, \\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy} \, dx = - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_2(x) \, dx + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \, dx, & y < 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = \begin{cases} \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy} \cos \pi kx \, dx = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_1(x) \cos \pi kx \, dx - \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \cos \pi kx \, dx, & y > 0, \\ \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy} \cos \pi kx \, dx = -\sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f_2(x) \cos \pi kx \, dx + \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \cos \pi kx \, dx, & y < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Интегрируя последние слагаемые в формулах (18) и (19) по частям два раза и с учетом условий (4) переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$u''_0(y) = \begin{cases} \int_0^1 f_1(x) \, dx, & y > 0, \\ - \int_0^1 f_2(x) \, dx, & y < 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$u''_k(y) = \begin{cases} \sqrt{2}(\pi k)^2 \int_0^1 u(x, y) \cos \pi kx \, dx + \sqrt{2} \int_0^1 f_1(x) \cos \pi kx \, dx, & y > 0, \\ -\sqrt{2}(\pi k)^2 \int_0^1 u(x, y) \cos \pi kx \, dx - \sqrt{2} \int_0^1 f_2(x) \cos \pi kx \, dx, & y < 0. \end{cases} \quad (21)$$



Отсюда следует, что функции  $u_k(y)$ ,  $k \in N_0 = N \cup \{0\}$ , являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$u_0''(y) = f_{1,0}, \quad y > 0, \quad (22)$$

$$u_0''(y) = -f_{2,0}, \quad y < 0, \quad (23)$$

$$u_k''(y) - (\pi k)^2 u_k(y) = f_{1,k}, \quad y > 0, \quad (24)$$

$$u_k''(y) + (\pi k)^2 u_k(y) = -f_{2,k}, \quad y < 0. \quad (25)$$

$$u_0(y) = \begin{cases} f_{1,0} \frac{y^2}{2} + a_0 y + b_0, & y > 0; \\ -f_{2,0} \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, & y < 0, \end{cases} \quad (26)$$

Дифференциальные уравнения (22) – (25) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\pi k y} + b_k e^{-\pi k y} - \frac{f_{1,k}}{(\pi k)^2}, & y > 0; \\ c_k \cos \pi k y + d_k \sin \pi k y - \frac{f_{2,k}}{(\pi k)^2}, & y < 0, \quad k \in N, \end{cases} \quad (27)$$

где  $a_k, b_k, c_k, d_k$  – произвольные постоянные,  $k \in N_0$ .

В силу (2) решения (26), (27) должны удовлетворять условиям склеивания:

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u_k'(0-0) = u_k'(0+0), \quad k \in N_0.$$

Удовлетворяя их этим условиям, получим  $d_0 = b_0$ ,  $c_0 = a_0$ ,  $c_k = a_k + b_k + \frac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2}$ ,  $d_k = a_k - b_k$ . Тогда решения (26), (27) примут вид:

$$u_0(y) = \begin{cases} f_{1,0} \frac{y^2}{2} + a_0 y + b_0, & y > 0; \\ -f_{2,0} \frac{y^2}{2} + a_0 y + b_0, & y < 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\pi k y} + b_k e^{-\pi k y} - \frac{f_{1,k}}{(\pi k)^2}, & y > 0; \\ \left( a_k + b_k + \frac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2} \right) \cos \pi k y + (a_k - b_k) \sin \pi k y - \frac{f_{2,k}}{(\pi k)^2}, & y < 0. \end{cases} \quad (29)$$

На основании (5), (6) и (12), (13) имеем

$$u_k(-\alpha) = \psi_k, \quad u_k(\beta) = \varphi_k, \quad u_k'(-\alpha) = g_k, \quad u_k'(\beta) = h_k, \quad (30)$$



где  $\psi_k, \varphi_k, g_k, h_k$  – коэффициенты разложения функций  $\psi(x), \varphi(x), g(x), h(x)$  соответственно в ряд по системе (9), то есть

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) dx, \quad \psi_k = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \cos \pi k x dx, \quad (31)$$

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \varphi_k = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \cos \pi k x dx, \quad (32)$$

$$g_0 = \int_0^1 g(x) dx, \quad g_k = \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \cos \pi k x dx, \quad (33)$$

$$h_0 = \int_0^1 h(x) dx, \quad h_k = \sqrt{2} \int_0^1 h(x) \cos \pi k x dx, \quad k \in N. \quad (34)$$

Удовлетворим решения (28), (29) условиям (30). Тогда получим относительно неизвестных  $a_k, b_k$  и  $f_{1,k}, f_{2,k}, k \in N_0$ , системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha a_0 + b_0 - \frac{\alpha^2}{2} f_{2,0} = \psi_0, \\ \beta a_0 + b_0 + \frac{\beta^2}{2} f_{1,0} = \varphi_0, \\ a_0 + \alpha f_{2,0} = g_0, \\ a_0 + \beta f_{1,0} = h_0, \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos \pi k \alpha - \sin \pi k \alpha) a_k + (\cos \pi k \alpha + \sin \pi k \alpha) b_k - \frac{\cos \pi k \alpha}{(\pi k)^2} f_{1,k} + \frac{\cos \pi k \alpha - 1}{(\pi k)^2} f_{2,k} = \psi_k, \\ e^{\pi k \beta} a_k + e^{-\pi k \beta} b_k - \frac{1}{(\pi k)^2} f_{1,k} = \varphi_k, \\ (\sin \pi k \alpha + \cos \pi k \alpha) a_k + (\sin \pi k \alpha - \cos \pi k \alpha) b_k - \frac{\sin \pi k \alpha}{(\pi k)^2} f_{1,k} + \frac{\sin \pi k \alpha}{(\pi k)^2} f_{2,k} = \frac{g_k}{\pi k}, \\ e^{\pi k \beta} a_k - e^{-\pi k \beta} b_k = \frac{h_k}{\pi k}. \end{array} \right. \quad (36)$$

Определители  $\Delta_{\alpha\beta}(0), \Delta_{\alpha\beta}(k)$  систем (35), (36) равны соответственно:

$$\frac{\alpha\beta}{2} \Delta_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{2} \alpha\beta(\alpha + \beta), \quad (37)$$

$$\frac{2}{(\pi k)^4} \Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{2}{(\pi k)^4} (-\sin \pi k \alpha + \operatorname{sh} \pi k \beta + \sin \pi k \alpha \operatorname{ch} \pi k \beta - \cos \pi k \alpha \operatorname{sh} \pi k \beta). \quad (38)$$

Очевидно, что  $\Delta_{\alpha\beta}(0) > 0$ . Тогда при условии, что при всех  $k \in N$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) \neq 0, \quad (39)$$



системы (35) и (36) имеют единственные решения:

$$a_0 = \frac{2(\varphi_0 - \psi_0) - \alpha g_0 - \beta h_0}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \quad (40)$$

$$b_0 = \frac{2(\beta\psi_0 + \alpha\varphi_0) + \alpha\beta(g_0 - h_0)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \quad (41)$$

$$f_{1,0} = \frac{2(\psi_0 - \varphi_0) + \alpha g_0 + (\alpha + 2\beta)h_0}{\beta\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \quad (42)$$

$$f_{2,0} = \frac{2(\psi_0 - \varphi_0) + (2\alpha + \beta)g_0 + \beta h_0}{\alpha\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \quad (43)$$

$$a_k = \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) \left( e^{-\pi k\beta} \sin \pi k\alpha (\psi_k - \varphi_k) + (1 - \cos \pi k\alpha) e^{-\pi k\beta} g_k / \pi k \right) + \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) \left( 1 + \sin \pi k\alpha - \cos \pi k\alpha - e^{-\pi k\beta} \sin \pi k\alpha \right) h_k / \pi k, \quad (44)$$

$$b_k = \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) \left( \sin \pi k\alpha e^{\pi k\beta} (\psi_k - \varphi_k) + (1 - \cos \pi k\alpha) e^{\pi k\beta} g_k / \pi k \right) + \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) \left( 1 - \sin \pi k\alpha - \cos \pi k\alpha + \sin \pi k\alpha e^{\pi k\beta} \right) h_k / \pi, \quad (45)$$

$$f_{1,k} = \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) (\pi k)^2 [\sin \pi k\alpha \cdot \psi_k + (\cos \pi k\alpha \operatorname{sh} \pi k\beta - \sin \pi k\alpha \operatorname{ch} \pi k\beta - \operatorname{sh} \pi k\beta) \varphi_k] + \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) \pi k [(1 - \cos \pi k\alpha) g_k + (\sin \pi k\alpha \operatorname{sh} \pi k\beta - \cos \pi k\alpha \operatorname{ch} \pi k\beta + \operatorname{ch} \pi k\beta) h_k], \quad (46)$$

$$f_{2,k} = \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) (\pi k)^2 [(\sin \pi k\alpha + \cos \pi k\alpha \operatorname{sh} \pi k\beta - \sin \pi k\alpha \operatorname{ch} \pi k\beta) \psi_k - \operatorname{sh} \pi k\beta \varphi_k] + \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) (\pi k) [(-\cos \pi k\alpha + \sin \pi k\alpha \operatorname{sh} \pi k\beta - \cos \pi k\alpha \operatorname{ch} \pi k\beta) g_k + (\operatorname{ch} \pi k\beta - 1) h_k]. \quad (47)$$

Таким образом, функции (28) и (29) построены однозначно. Докажем теперь единственность решения задачи (2) – (6). Пусть  $\psi(x) = \varphi(x) = g(x) = h(x) \equiv 0$  и выполнены условия (39). Тогда в силу (31) – (34)  $\psi_k = \varphi_k = g_k = h_k \equiv 0$ ,  $k \in N_0$ , а значит, системы (35) (36) имеет нулевое решение:  $a_k = b_k = f_{1,k} = f_{2,k} \equiv 0$ ,  $k \in N_0$ . Тогда из равенств (12) – (15) получаем, что при всех  $y \in [-\alpha, \beta]$

$$\int_0^1 u(x, y) dx = 0, \quad \int_0^1 f_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \pi kx dx = 0, \quad \sqrt{2} \int_0^1 f_i(x) \cos \pi kx dx = 0, \quad i = 1, 2, \quad k \in N.$$

Отсюда в силу полноты системы (9) в пространстве  $L_2[0, 1]$  и условий (2) следует, что  $u(x, y) \equiv 0$  и  $f(x, y) \equiv 0$  в  $\overline{D}$ .

Пусть для некоторых  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $k = p$  выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$ , тогда задача (2) – (6), где  $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) = h(x) \equiv 0$ , имеет ненулевое решение

$$u_p(x, y) = u_p(y) \cos \pi px, \quad (48)$$



$$u_p(y) = \begin{cases} \frac{\sin \pi p \alpha (\operatorname{ch} \pi p (y - \beta) - 1)}{(\pi p)^2 \bar{\Delta}_p} f_{2,p}, & y > 0, \\ \frac{\operatorname{sh} \pi p \beta \cos \pi p (y + \alpha) - \bar{\Delta}_p(p)}{(\pi p)^2 \bar{\Delta}_p} f_{2,p}, & y < 0, \end{cases} \quad (49)$$

$$f_{1,p}(x) = \frac{\sin \pi p \alpha}{\bar{\Delta}_p(p)} f_{2,p} \cos \pi p x, \quad (50)$$

$$f_{2,p}(x) = f_{2,p} \cos \pi p x, \quad (51)$$

где  $\bar{\Delta}_p(p) = \cos \pi p \alpha \operatorname{sh} \pi p \beta + \sin \pi p \alpha - \sin \pi p \alpha \operatorname{ch} \pi p \beta$ ,  $f_{2,p}$  – произвольная, отличная от нуля постоянная.

Естественно возникает вопрос при каких  $\alpha$  и  $\beta$  выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  обращается в нуль. Для этого представим  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = 4 \sin \frac{\pi k \alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi k \beta}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \pi k \beta} \sin \left( \frac{\pi k \alpha}{2} + \theta_k \right), \quad (52)$$

где  $\theta_k = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \pi k \beta / 2}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi k \beta}} \rightarrow \frac{\pi}{4}$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Из представления (52) видно, что выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\sin \frac{\pi k \alpha}{2} = 0$  или  $\sin \left( \frac{\pi k \alpha}{2} + \theta_k \right) = 0$ .

В результате, получаем две серии корней  $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ :  $\alpha_{n_1} = \frac{2n_1}{k}$ ,  $\alpha_{n_2} = \frac{2n_2}{k} - \frac{2\theta_k}{\pi k}$ ,  $n_1, n_2 \in N$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом, доказана следующая

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи (2) – (6), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (39) при всех  $k \in N$ .*

**3. Существование решения задачи.** Решение задачи (2) – (6) при условии (39) получено формально в виде сумм ортогональных рядов (10), (11). Поскольку  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, то для обоснования существования решения задачи (2) – (6) необходимо показать существование чисел  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что при больших  $k$  выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  отделено от нуля. В противном случае может возникнуть проблема малых знаменателей [6, 13].

Для обоснования существования решения докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Если  $\alpha > 0$  является алгебраическим числом степени  $n \geq 2$ , то существуют положительные постоянные  $\beta_0$  и  $C_0$ , вообще говоря зависящие от  $\alpha$ , такие, что при всех  $\beta > \beta_0$  и  $k \in N$  справедливы оценки*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq e^{\pi k \beta} \frac{C_0}{k^{2+\varepsilon}}, \quad n > 2, \quad (53)$$

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq e^{\pi k \beta} \frac{C_0}{k^2}, \quad n = 2, \quad (54)$$

где  $\varepsilon > 0$  – достаточно малое число.



□ Представим выражение (52) в виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = e^{\pi k\beta} \sqrt{2} (1 - e^{-\pi k\beta}) \sqrt{1 + e^{-2\pi k\beta}} \sin \pi k\alpha_1 \sin (\pi k\alpha_1 + \theta_k), \quad (55)$$

где  $\alpha_1 = \alpha/2$ . Заметим, что для любых  $k \in N$

$$2 > \sqrt{2} (1 - e^{-\pi k\beta}) \sqrt{1 + e^{-2\pi k\beta}} > \sqrt{2} (1 - e^{-\pi\beta}) = C_1, \quad (56)$$

$C_i$  здесь и далее положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от  $\beta$  и  $\alpha$ .

Рассмотрим теперь множитель  $\sin \pi k\alpha_1$  выражения (55) и представим в виде

$$|\sin \pi k\alpha_1| = |\sin (\pi k\alpha_1 - \pi n)| = \left| \sin \pi k \left( \alpha_1 - \frac{n}{k} \right) \right|, \quad n \in N.$$

Для любого  $k \in N$  существует натуральное  $n$  такое, что

$$\left| \alpha_1 - \frac{n}{k} \right| < \frac{1}{2k}. \quad (57)$$

В самом деле, чтобы выполнялось неравенство (57) достаточно положить

$$n = \begin{cases} [\alpha_1 k], & \{\alpha_1 k\} < \frac{1}{2}, \\ [\alpha_1 k] + 1, & \{\alpha_1 k\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Из теории чисел известно [14, с.268], что для любого алгебраического числа  $\alpha_1$  степени  $n \geq 2$  и произвольного положительного числа  $\gamma$  найдется положительное число  $C_2$ , зависящее от  $\alpha$  и  $\gamma$  такое, что при любых целых  $p, q$  ( $q > 0$ ) будет иметь место неравенство

$$\left| \alpha_1 - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_2}{q^{2+\gamma}}. \quad (58)$$

Пусть  $n \in N$  такое, что выполнено неравенство (57). Отсюда имеем

$$\pi k \left| \alpha_1 - \frac{n}{k} \right| < \frac{\pi}{2}. \quad (59)$$

Тогда с учетом неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (60)$$

и оценки (58) при всех  $k \in N$  будем иметь

$$\sin \left( \pi k \left| \alpha_1 - \frac{n}{k} \right| \right) > 2k \left| \alpha_1 - \frac{n}{k} \right| > \frac{2C_2}{k^{1+\gamma}}. \quad (61)$$



Теперь рассмотрим следующий множитель выражения (55):

$$|\sin(\pi k \alpha_1 + \theta_k)| = |\sin(\pi k \alpha_1 - \pi n + \theta_k)| = \left| \sin \left[ \pi k \left( \alpha_1 - \frac{n}{k} \right) + \theta_k \right] \right|.$$

Функции  $y = \arcsin u$  и  $u = \frac{\operatorname{sh} x/2}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$  возрастают, следовательно, имеет место неравенство

$$\theta_1 \leq \theta_k < \frac{\pi}{4}. \quad (62)$$

Учитывая оценки (58) и (59) можем записать

$$\frac{\pi C_2}{k^{1+\gamma}} < \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| < \frac{\pi}{2}. \quad (63)$$

Тогда, в силу (62) и (63), возможны два случая:

- 1).  $\frac{\pi}{2} < \left| \pi k \left( \alpha_1 - \frac{m}{k} \right) + \theta_k \right| \leq \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| + |\theta_k| < \frac{3\pi}{4};$
- 2).  $0 < \left| \pi k \left( \alpha_1 - \frac{m}{k} \right) + \theta_k \right| < \frac{\pi}{2}.$

В первом случае в силу убывания функции  $y = \sin x$  при  $x \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$  верно неравенство

$$\left| \sin \left[ \pi k \left( \alpha_1 - \frac{m}{k} \right) + \theta_k \right] \right| > \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (64)$$

Рассмотрим теперь второй случай. Учитывая неравенство (60), имеем

$$\begin{aligned} \sin |\pi k \alpha_1 - \pi m + \theta_k| &> \frac{2}{\pi} |\pi k \alpha_1 - \pi m + \theta_k| = \frac{2}{\pi} \left| \pi k \alpha_1 - \frac{4m-1}{4} \pi + \theta_k - \frac{\pi}{4} \right| \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left( \left| \pi k \alpha_1 - \frac{4m-1}{4} \pi \right| - \left| \theta_k - \frac{\pi}{4} \right| \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Используя оценку (58), оценим снизу первое слагаемое неравенства (65):

$$\left| \pi k \alpha_1 - \frac{4m-1}{4} \pi \right| = \pi k \left| \alpha - \frac{4m-1}{2k} \right| > \frac{\pi C_2}{(2k)^{1+\gamma}}. \quad (66)$$

Теперь, применяя формулу разности арксинусов  $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$ ,  $xy > 0$ , оценим сверху второе слагаемое (65):

$$\begin{aligned} \left| \theta_k - \frac{\pi}{4} \right| &= \left| \arcsin \frac{\operatorname{sh} \pi k \beta / 2}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi k \beta}} - \arcsin \sqrt{2} \right| = \\ &= \left| \arcsin \frac{1}{e^{\pi k \beta} \sqrt{1 + e^{-2\pi k \beta}}} \right| < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{\pi k \beta} \sqrt{1 + e^{-2\pi k \beta}}} < \frac{\pi}{2e^{\pi k \beta}}, \end{aligned} \quad (67)$$

так как  $|\arcsin x| < \frac{\pi}{2}x$ ,  $0 < |x| < 1$ .



Итак, из оценок (64) – (67) имеем

$$|\sin(\pi k \alpha_1 + \theta_k)| > \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi C_2}{k^{1+\gamma}} - \frac{\pi}{2e^{\pi k \beta}} \right) = \frac{C_3}{k^{1+\gamma}} - \frac{1}{e^{\pi k \beta}}. \quad (68)$$

Заметим, что  $e^{\pi k \beta} > (\pi k \beta)^{1+\gamma}$  для всех  $k$ . Тогда из (68) имеем

$$|\sin(\pi k \alpha_1 + \theta_k)| > \frac{1}{k^{1+\gamma}} \left( C_3 - \frac{1}{(\pi \beta)^{1+\gamma}} \right) = \frac{C_4}{k^{1+\gamma}}, \quad (69)$$

где  $C_4 > 0$  при  $\beta > \beta_0 = \frac{1}{\pi C_3^{1/(1+\gamma)}}$ .

Таким образом, из (56), (61) и (69) получим оценку (53).

В случае  $n = 2$  более точный результат дает теорема Лиувилля [15, с.160]: для любого алгебраического числа  $\alpha$  степени  $n = 2$  существует положительное число  $\delta > 0$  такое, что при любых целых  $p, q$  ( $q > 0$ ) справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\delta}{q^2}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные первому случаю  $n > 2$ , получим оценку (54). ■

Отметим, что любое иррациональное число  $\alpha$  единственным образом разлагается в бесконечную цепную дробь  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ , при этом целые числа  $a_1, a_2, \dots$  называются элементами числа  $\alpha$ . Как известно элементы всякой квадратичной иррациональности ограничены.

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha > 0$  является иррациональным числом с неограниченными элементами. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует бесконечное множество натуральных чисел  $k$  таких, что

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| < e^{\pi k \beta} \frac{\varepsilon C_5}{k}. \quad (70)$$

□ В силу теоремы 23 [15, с.49] для любого иррационального числа  $\alpha$  с неограниченными элементами при любом  $\varepsilon > 0$  существует бесконечное множество пар целых чисел  $(k, m)$ ,  $k > 0$ , таких, что

$$\left| \alpha - \frac{m}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

Тогда

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| < e^{\pi k \beta} |\sin \pi k \alpha_1| \cdot |\sin(\pi k \alpha_1 + \theta_k)| \leq e^{\pi k \beta} \left| \sin \pi k \left( \alpha_1 - \frac{m}{k} \right) \right| \leq e^{\pi k \beta} \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| < e^{\pi k \beta} \frac{\varepsilon C_5}{k}. \quad \blacksquare$$

Заметим, что из полученной оценки следует, что для  $\alpha > 0$ , удовлетворяющих условию леммы 2, выражение  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  может быть сколь угодно малым, а следовательно, решение задачи в виде сумм рядов (10), (11) для таких  $\alpha$  не существует.



Далее, для доказательства существования решения задачи, из ряда (10) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x(x, y) = -\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \pi k u_k(y) \sin \pi k x, \quad (71)$$

$$u_y(x, y) = u'_0(y) + \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(y) \sin \pi k x, \quad (72)$$

$$u_{xx}(x, y) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi k)^2 u_k(y) \cos \pi k x, \quad (73)$$

$$u_{yy}(x, y) = u''_0(y) + \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} u''_k(y) \cos \pi k x. \quad (74)$$

**Лемма 3.** Пусть справедливо неравенство (53). Тогда для любых  $y \in [-\alpha, \beta]$  справедливы оценки

$$|u_k(y)| \leq C_6 (k^{2+\varepsilon} |\psi_k| + k^{2+\varepsilon} |\varphi_k| + k^{1+\varepsilon} |g_k| + k^{1+\varepsilon} |h_k|), \quad (75)$$

$$|u''_k(y)| \leq C_7 (k^{4+\varepsilon} |\psi_k| + k^{4+\varepsilon} |\varphi_k| + k^{3+\varepsilon} |g_k| + k^{3+\varepsilon} |h_k|), \quad (76)$$

$$|f_{1,k}| \leq C_8 k^{3+\varepsilon} \left( \frac{k |\psi_k|}{e^{\pi k \beta}} + k |\varphi_k| + \frac{|g_k|}{e^{\pi k \beta}} + |h_k| \right), \quad (77)$$

$$|f_{2,k}| \leq C_9 k^{3+\varepsilon} (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|). \quad (78)$$

Если справедлива оценка (54), то

$$|u_k(y)| \leq C_6 k (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|), \quad (79)$$

$$|u''_k(y)| \leq C_7 k^3 (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|), \quad (80)$$

$$|f_{1,k}| \leq C_8 k^3 \left( \frac{k |\psi_k|}{e^{\pi k \beta}} + k |\varphi_k| + \frac{|g_k|}{e^{\pi k \beta}} + |h_k| \right), \quad (81)$$

$$|f_{2,k}| \leq C_9 k^3 (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|). \quad (82)$$

□ Непосредственно из равенств (44) – (47), учитывая лемму 1, имеем

$$|a_k| \leq \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k \beta}} \left( e^{-\pi k \beta} (|\psi_k| + |\varphi_k|) + e^{-\pi k \beta} \frac{|g_k|}{\pi k} + (1 + \sqrt{2} + e^{-\pi k \beta}) \frac{|h_k|}{\pi k} \right) \leq \quad (83)$$

$$\leq \frac{C_6}{e^{\pi k \beta}} k^{1+\varepsilon} (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|),$$

$$|b_k| \leq \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k \beta}} \left( e^{\pi k \beta} (|\psi_k| + |\varphi_k|) + e^{\pi k \beta} \frac{|g_k|}{\pi k} + (1 + \sqrt{2} + e^{\pi k \beta}) \frac{|h_k|}{\pi k} \right) \leq \quad (84)$$

$$\leq C_7 k^{1+\varepsilon} (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|),$$



$$|f_{1,k}| \leq \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k \beta}} \left( (\pi k)^2 |\psi_k| + 3(\pi k)^2 e^{\pi k \beta} |\varphi_k| + 2\pi k |g_k| + 3\pi k e^{\pi k \beta} |h_k| \right) \leq C_8 k^{3+\varepsilon} \left( \frac{k |\psi_k|}{e^{\pi k \beta}} + k |\varphi_k| + \frac{|g_k|}{e^{\pi k \beta}} + |h_k| \right), \quad (85)$$

$$|f_{2,k}| \leq \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k \beta}} \left( (\pi k)^2 (1 + 2e^{\pi k \beta}) |\psi_k| + e^{\pi k \beta} (\pi k)^2 |\varphi_k| + \pi k (1 + 2e^{\pi k \beta}) |g_k| + \pi k e^{\pi k \beta} |h_k| \right) \leq C_9 k^{3+\varepsilon} (k |\psi_k| + k |\varphi_k| + |g_k| + |h_k|). \quad (86)$$

Из формул (28), (29) и неравенств (83) – (86) получим оценку (75) для  $u_k$ . Для того, чтобы получить оценку (76), найдем производные:

$$u'_k(y) = \begin{cases} \pi k (a_k e^{\pi k y} - b_k e^{-\pi k y}), & y > 0; \\ \pi k \left[ \left( a_k + b_k + \frac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2} \right) \sin \pi k y + (a_k - b_k) \cos \pi k y \right], & y < 0, \end{cases}$$

$$u''_k(y) = \begin{cases} (\pi k)^2 (a_k e^{\pi k y} + b_k e^{-\pi k y}), & y > 0; \\ (\pi k)^2 \left[ - \left( a_k + b_k + \frac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2} \right) \sin \pi k y - (a_k - b_k) \sin \pi k y \right], & y < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из оценок (83) – (86) следует справедливость (76).

Неравенства (79) – (82) выводятся аналогичным образом. ■

Из последней леммы следует, что ряды (10), (11), (71) – (74) мажорируются числовым рядом

$$C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} (k^{4+\varepsilon} |\psi_k| + k^{4+\varepsilon} |\varphi_k| + k^{3+\varepsilon} |g_k| + k^{3+\varepsilon} |h_k|). \quad (87)$$

**Лемма 4.** Пусть  $\psi(x), \varphi(x) \in C^5[0, 1]$ ,  $g(x), h(x) \in C^4[0, 1]$ ,  $\psi'''(0) = \psi'''(1) = \varphi'''(0) = \varphi'''(1) = g'(0) = g'(1) = g'''(0) = g'''(1) = h'(0) = h'(1) = h'''(0) = h'''(1) = 0$ . Тогда справедливы представления

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(5)}}{(\pi k)^5}, \quad \varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(5)}}{(\pi k)^5}, \quad (88)$$

$$g_k = \frac{g_k^{(4)}}{(\pi k)^4}, \quad h_k = \frac{h_k^{(4)}}{(\pi k)^4}, \quad (89)$$

где

$$\psi_k^{(5)} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi^V(x) \sin \pi k x dx, \quad \varphi_k^{(5)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^V(x) \sin \pi k x dx, \quad (90)$$

$$g_k^{(4)} = \sqrt{2} \int_0^1 g^{IV}(x) \cos \pi k x dx, \quad h_k^{(4)} = \sqrt{2} \int_0^1 h^{IV}(x) \cos \pi k x dx, \quad (91)$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(5)}|^2 \leq 16 \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(5)}|^2 \leq 16 \|\varphi^V(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \quad (92)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(4)}|^2 \leq 16 \|g^{IV}(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(4)}|^2 \leq 16 \|h^{IV}(x)\|_{L_2[0,1]}^2. \quad (93)$$

□ Интегрируя вторые интегралы формул (31), (32) по частям пять раз, а интегралы формул (33), (34) – четыре раза, получим непосредственно выражения (88), (89).

Поскольку системы функций (9) и  $\{\sqrt{2} \sin \pi k x\}_{k=1}^{\infty}$  ортонормированы в пространстве  $L_2[0, 1]$ , то справедливость оценок (92), (93) следует из неравенства Бесселя по этим системам. ■

При выполнении условий леммы 4 ряд (87) мажорируется числовым рядом

$$C_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\varepsilon}} \left( |\psi_k^{(5)}| + |\varphi_k^{(5)}| + |g_k^{(4)}| + |h_k^{(4)}| \right). \quad (94)$$

**Лемма 5.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  удовлетворяют условиям леммы 4 и  $\psi(x), \varphi(x) \in C^{5+\delta}[0, 1]$ ,  $g(x), h(x) \in C^{4+\delta}[0, 1]$ ,  $\varepsilon < \delta < 1$ . Тогда справедливы оценки:

$$|\psi_k^{(5)}| \leq \frac{C_{13}}{k^\delta}, \quad |\varphi_k^{(5)}| \leq \frac{C_{14}}{k^\delta}, \quad (95)$$

$$|g_k^{(4)}| \leq \frac{C_{15}}{k^\delta}, \quad |h_k^{(4)}| \leq \frac{C_{16}}{k^\delta}. \quad (96)$$

□ следует из теоремы о скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей на  $[0, 1]$  условию Гельдера с показателем  $\delta \in (0, 1)$  [16, с.81]. ■

В силу леммы 5 ряд (94) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta-\varepsilon}}.$$

Тогда ряд (94), а значит и ряд (87) сходятся. Из сходимости этих рядов в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (10), (71), (72) в замкнутой области  $\bar{D}$ , ряды (73), (74) – в замкнутых областях  $\bar{D}_+$  и  $\bar{D}_-$ , ряды (11) – на отрезке  $[0, 1]$ . Следовательно функции  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$  удовлетворяют условиям (2). Подставляя ряды (10), (11) в уравнение (1), убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условию (3).

В случае, когда  $\alpha$  является алгебраическим числом степени  $n = 2$ , в приведенных выше формулах  $\varepsilon = 0$ , и ряд (94) сходится. Тогда построенные функции  $u(x, y)$  и  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , аналогично являются решением задачи (2) – (6), причем, для этого достаточно, чтобы функции  $\psi(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  обладали гладкостью, указанной в лемме 4.

Итак, доказаны следующие утверждения.

**Теорема 2.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  удовлетворяют условиям леммы 5 и имеет место оценка (53). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (6),



которое определяется рядами (10), (11).

**Теорема 3.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  удовлетворяют условиям леммы 4 и имеет место оценка (54). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (6), которое определяется рядами (10), (11).

**4. Устойчивость решения задачи.** Введем следующие нормы:

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \left( \int_0^1 |u(x, y)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x, y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left[ \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n |f^{(k)}(x)|^2 \right) dx \right]^{1/2}, \quad n \in N_0.$$

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (10) и (11) задачи (2) – (6) справедливы оценки

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_{17}(\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2} + \|h\|_{W_2^2}), \quad (97)$$

$$\|f_i(x)\|_{L_2} \leq C_{18}(\|\psi\|_{W_2^5} + \|\varphi\|_{W_2^5} + \|g\|_{W_2^4} + \|h\|_{W_2^4}), \quad i = 1, 2, \quad (98)$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} \leq C_{19}(\|\psi\|_{W_2^4} + \|\varphi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3} + \|h\|_{W_2^3}), \quad (99)$$

$$\|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} \leq C_{20}(\|\psi\|_{W_2^6} + \|\varphi\|_{W_2^6} + \|g\|_{W_2^5} + \|h\|_{W_2^5}), \quad i = 1, 2, \quad (100)$$

где постоянные  $C_i$ ,  $i = 17, 20$ , не зависят от функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $g$  и  $h$ .

□ Поскольку система (9) ортонормирована в  $L_2[0, 1]$ , то из (10) и (75) получаем

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2}^2 &\leq u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leq \tilde{C}_1 \left[ (|\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0|)^2 + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (k^{2+\varepsilon}|\psi_k| + k^{2+\varepsilon}|\varphi_k| + k^{1+\varepsilon}|g_k| + k^{1+\varepsilon}|h_k|)^2 \left. \right] \leq 4\tilde{C}_1 \left[ |\psi_0|^2 + |\varphi_0|^2 + |g_0|^2 + |h_0|^2 + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (k^{4+2\varepsilon}|\psi_k|^2 + k^{4+2\varepsilon}|\varphi_k|^2 + k^{2+2\varepsilon}|g_k|^2 + k^{2+2\varepsilon}|h_k|^2) \right], \end{aligned} \quad (101)$$

$\tilde{C}_i$  здесь и далее положительные постоянные. Представим коэффициенты  $\psi_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $g_k$  и  $h_k$  в виде:

$$|\psi_k| = \frac{|\psi_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}, \quad |\varphi_k| = \frac{|\varphi_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}, \quad |g_k| = \frac{|g_k^{(2)}|}{(\pi k)^2}, \quad |h_k| = \frac{|h_k^{(2)}|}{(\pi k)^2}, \quad (102)$$



где  $\psi_k^{(3)}$ ,  $\varphi_k^{(3)}$ ,  $g_k^{(2)}$  и  $h_k^{(2)}$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье по системам  $\{\sqrt{2} \sin \pi k x\}_{k=1}^{\infty}$ , (9) соответственно функций  $\psi'''(x)$ ,  $\varphi'''(x)$ ,  $g''(x)$ ,  $h''(x)$ . Подставляя (102) в неравенство (101), получим

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2}^2 &\leq 4\tilde{C}_1 \left[ |\psi_0|^2 + |\varphi_0|^2 + |g_0|^2 + |h_0|^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \left( k^{4+2\varepsilon} \frac{|\psi_k^{(3)}|^2}{(\pi k)^6} + k^{4+2\varepsilon} \frac{|\varphi_k^{(3)}|^2}{(\pi k)^6} + k^{2+2\varepsilon} \frac{|g_k^{(2)}|^2}{(\pi k)^4} + k^{2+2\varepsilon} \frac{|h_k^{(2)}|^2}{(\pi k)^4} \right) \right] < \quad (103) \\ &< 4\tilde{C}_1 \left[ |\psi_0|^2 + |\varphi_0|^2 + |g_0|^2 + |h_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\psi_k^{(3)}|^2 + |\varphi_k^{(3)}|^2 + |g_k^{(2)}|^2 + |h_k^{(2)}|^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\psi_0|^2 &= \left( \int_0^1 \psi(x) dx \right)^2 \leq \left[ \left( \int_0^1 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \psi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \int_0^1 \psi^2(x) dx = \|\psi\|_{L_2}^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 = \int_0^1 (\psi'''(x))^2 dx = \|\psi'''\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Аналогично  $|\varphi_0|^2 \leq \|\varphi\|_{L_2}^2$ ,  $|g_0|^2 \leq \|g\|_{L_2}^2$ ,  $|h_0|^2 \leq \|h\|_{L_2}^2$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 \leq \|\varphi'''\|_{L_2}^2$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(2)}|^2 \leq \|g''\|_{L_2}^2$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(2)}|^2 \leq \|h''\|_{L_2}^2$ . Отсюда и из (103) следует

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2}^2 &< 4\tilde{C}_1 \left[ \|\psi\|_{L_2}^2 + \|\varphi\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2 + \|h\|_{L_2}^2 + \|\psi'''\|_{L_2}^2 + \|\varphi'''\|_{L_2}^2 + \|g''\|_{L_2}^2 + \|h''\|_{L_2}^2 \right] \leq \\ &\leq C_{17}^2 (\|\psi\|_{W_2^3}^2 + \|\varphi\|_{W_2^3}^2 + \|g\|_{W_2^2}^2 + \|h\|_{W_2^2}^2), \end{aligned}$$

что означает справедливость оценки (97).

Пусть  $(x, y)$  – произвольная точка из  $\bar{D}$ . Учитывая (75), получим

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq |u_0(y)| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(y)| \leq \\ &\leq \tilde{C}_2 \left[ |\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (k^{2+\varepsilon} |\psi_k| + k^{2+\varepsilon} |\varphi_k| + k^{1+\varepsilon} |g_k| + k^{1+\varepsilon} |h_k|) \right]. \quad (104) \end{aligned}$$

Представив коэффициенты  $|\psi_k|$ ,  $|\varphi_k|$ ,  $|g_k|$ ,  $|h_k|$  в виде

$$|\psi_k| = \frac{|\psi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4}, \quad |\varphi_k| = \frac{|\varphi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4}, \quad |g_k| = \frac{|g_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}, \quad |h_k| = \frac{|h_k^{(3)}|}{(\pi k)^3},$$

где  $\psi_k^{(4)}$ ,  $\varphi_k^{(4)}$ ,  $g_k^{(3)}$ ,  $h_k^{(3)}$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье по системам (9) и  $\{\sqrt{2} \sin \pi k x\}_{k=1}^{\infty}$  соответственно функций  $\psi^{IV}(x)$ ,  $\varphi^{IV}(x)$ ,  $g^{III}(x)$ ,  $h^{III}(x)$ , из (104)



получим

$$\begin{aligned}
 |u(x, y)| &\leq \tilde{C}_2 \left[ |\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \left( k^{2+\varepsilon} \frac{|\psi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4} + k^{2+\varepsilon} \frac{|\varphi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4} + k^{1+\varepsilon} \frac{|g_k^{(3)}|}{(\pi k)^3} + k^{1+\varepsilon} \frac{|h_k^{(3)}|}{(\pi k)^3} \right) \right] < \\
 &< \tilde{C}_2 \left[ |\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( |\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| + |g_k^{(3)}| + |h_k^{(3)}| \right) \right].
 \end{aligned} \tag{105}$$

На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( |\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| + |g_k^{(3)}| + |h_k^{(3)}| \right) &\leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 &+ \left. \left( \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(3)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(3)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left( \frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} (\|\psi^{IV}\|_{L_2} + \|\varphi^{IV}\|_{L_2} + \|g'''\|_{L_2} + \|h'''\|_{L_2}).
 \end{aligned} \tag{106}$$

При получении оценки (106) было использовано равенство  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ .

С учетом (106) неравенство (105) примет вид

$$\begin{aligned}
 |u(x, y)| &\leq \tilde{C}_3 [\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2} + \|h\|_{L_2} + (\|\psi^{IV}\|_{L_2} + \|\varphi^{IV}\|_{L_2} + \|g'''\|_{L_2} + \|h'''\|_{L_2})] \\
 &\leq C_{19} \left( \|\psi\|_{W_2^4} + \|\varphi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3} + \|h\|_{W_2^3} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично на основании неравенств (77), (78) устанавливается справедливость оценок (98) и (100). ■

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для решения (10) и (11) задачи (2) – (6) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 \|u(x, y)\|_{L_2} &\leq C_{17} (\|\psi\|_{W_2^2} + \|\varphi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1} + \|h\|_{W_2^1}), \\
 \|f_i(x)\|_{L_2} &\leq C_{18} (\|\psi\|_{W_2^4} + \|\varphi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3} + \|h\|_{W_2^3}), \quad i = 1, 2, \\
 \|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} &\leq C_{19} (\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2} + \|h\|_{W_2^2}), \\
 \|f_i(x)\|_{C(\bar{D})} &\leq C_{20} (\|\psi\|_{W_2^5} + \|\varphi\|_{W_2^5} + \|g\|_{W_2^4} + \|h\|_{W_2^4}), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

□ Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4 с использованием оценок (79), (81) и (82). ■



### Литература

1. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – 39;5. – С.195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной задаче для волнового уравнения // ДАН СССР. – 1964. – 157;3. – С.520-521.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / М.: МГУ, 1994. – 285 с.
5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН СССР. – 2007. – 413;1. – С.23-26.
6. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН СССР. – 2009. – 429;4. – С.451-454.
7. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия Вузов. Математика. – 2010. – 4. – С.55-62.
8. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Матем. заметки. – 2010. – 87;6. – С.907-918.
9. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика. – 2011. – 2. – С.71-85.
10. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия Вузов. Математика. – 2011. – 5. – С.44-52.
11. Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения» (28 - 30 июля 2011 г., г. Стерлитамак) / Уфа: Гилем, 2011. С.153-158.
12. Удалова Г.Ю. Обратная задача для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа // Вестник СамГУ - Естественно-научная серия. – 2010. – №4(78). – С.116-122.
13. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. – XVIII;6(114). – С.91-192.
14. Бухштаб А.А. Теория чисел / М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
15. Хинчин А.Я. Цепные дроби / М.: Наука, 1978. – 112 с.
16. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1 / М.: Мир, 1965. – 616 с.

### BOUNDARY PROBLEM FOR LAVRENTYEV-BICZADZE'S EQUATION WITH UNKNOWN RIGHT-HAND PART

G.Y. Udalova

Samara state architectural-construction university,  
Molodogvardeyskaya St., 194, Samara, 443001, Russia, e-mail: [yeyeg@yandex.ru](mailto:yeyeg@yandex.ru)

**Abstract.** Boundary problem for differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type with various unknown right sides in the rectangular domain is studied. The criterion uniqueness of a solution is found. The solution is constructed as the sum of eigenfunctions connected with special one-dimensional boundary problem. The solution stability relative to boundary functions is proved.

**Key words:** mixed type equation, inverse problem, spectral method, uniqueness, solution existence, stability.



УДК 517.958, 517.986.7

## ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Х.Г. Умаров<sup>17)</sup>Чеченский государственный университет,  
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364037, Россия, e-mail: [umarov50@mail.ru](mailto:umarov50@mail.ru)

**Аннотация.** Для линейного дифференциального уравнения в частных производных, моделирующего эволюцию линии свободной поверхности фильтрующейся жидкости, получен явный вид решения задачи Коши сведением поставленной задачи фильтрации к решению абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве.

**Ключевые слова:** свободная поверхность фильтрующейся жидкости, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Рассмотрим в области  $x \in R^1, 0 < t < T \leq +\infty$ , линейное дифференциальное уравнение в частных производных, моделирующее эволюцию линии свободной поверхности при фильтрации грунтовых вод [1]

$$\lambda u_t - u_{xxt} = \alpha u_{xx} - \beta u_{xxxx} + f, \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  — искомая функция, характеризующая напор жидкости;  $f = f(x, t)$  — заданная функция, учитывающая внешнее воздействие на фильтрационный поток;  $\lambda, \alpha, \beta$  — положительные постоянные зависящие от свойств водоносного грунта.

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешенным относительно производной по временной переменной  $t$ . Различные прямые и обратные начально-краевые задачи, для уравнения обобщающего уравнение (1), исследовались многими авторами (см., например, [2] и приведенную там библиографию).

Будем искать решение уравнения (1) в банаховом пространстве  $L_p(R^1)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , функций  $\psi = \psi(x)$  с интегрируемой по  $R^1$   $p$ -ой степенью абсолютной величины, норма которого определяется по формуле  $\|\psi\|_{L_p(R^1)} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^p dx \right)^{1/p} \equiv \|\psi\|_{L_p}$ , т.е. будем предполагать, что начальная функция

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2)$$

свободный член  $f(x, t)$  и искомое решение  $u(x, t)$ , вместе со всеми производными входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной  $t$ , по переменной  $x$  принадлежат банахову пространству  $L_p(R^1)$ .

<sup>17</sup>Умаров Х.Г., доцент Чеченского государственного университета.



Наша цель – получить явный вид решения  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2), при этом решение  $u(x, t)$  непрерывно при  $t \in [0, T[$  по норме пространства  $L_p(R^1)$ , а входящие в уравнение частные и смешанные производные непрерывны при  $t \in ]0, T[$  также по норме пространства  $L_p(R^1)$ .

В пространстве  $L_p(R^1)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , дифференциальный оператор  $d^2/dx^2$ , с областью определения  $D(d^2/dx^2) = \{\psi(x) \in L_p(R^1) : \text{обобщенные производные } \psi'(x), \psi''(x) \in L_p(R^1)\}$  порождает сжимающую [3, с. 261], [4, с. 58] сильно непрерывную, более того – аналитическую, полугруппу  $U(t; d^2/dx^2)$ ,  $t \geq 0$ , класса  $C_0$ , представляющуюся сингулярным интегралом Гаусса–Вейерштрасса:

$$U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \psi(\xi) d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора  $d^2/dx^2$  и для резольвенты  $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$ ,  $\lambda > 0$ , справедлива [3, с. 37] оценка

$$\lambda \left\| \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \right\| \leq 1. \quad (4)$$

Наличие в точке  $\lambda > 0$ , резольвенты  $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$  позволяет существенно преобразовать уравнение (1), разрешив его относительно производной по времени. Именно, пусть  $u(x, t)$  – решение задачи Коши (1), (2), для которого частные производные по переменной  $x$  первого и второго порядков непрерывны при  $t \in [0, T[$ . Введем новую неизвестную функцию

$$v = \lambda u - u_{xx}. \quad (5)$$

Из замены (5) можно единственным образом определить значение

$$v|_{t=0} = \lambda u(x, 0) - u_{xx}(x, 0) = \lambda \varphi(x) - \varphi_{xx}(x)$$

при условии, что производные  $d^k \varphi(x) / dx^k$ ,  $k = 1, 2$ , принадлежат пространству  $L_p(R^1)$ , и выразить решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) через новую неизвестную функцию  $v(x, t)$ :

$$u = \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} v. \quad (6)$$

В результате подстановки (6) приходим к уравнению:

$$v_t = \left( \alpha I - \beta \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} v + f, \quad t > 0. \quad (7)$$

Операторный коэффициент в уравнении (7) – линейный оператор

$$\left( \alpha I - \beta \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} = \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \left( \alpha I - \beta \frac{d^2}{dx^2} \right) \frac{d^2}{dx^2}$$



определен на функциях  $\psi(x) \in L_p(R^1)$ , для которых существуют обобщенные производные  $d^k \psi(x)/dx^k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , принадлежащие пространству  $L_p(R^1)$ , и его можно продолжить до оператора

$$A + B, \quad A = \beta \frac{d^2}{dx^2}, \quad B = -(\alpha - \beta\lambda) \left[ I - \lambda \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \right],$$

область определения которого  $D(A + B) = D(d^2/dx^2)$ .

Таким образом, приходим к абстрактному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, обобщающему уравнение (7) в банаховом пространстве  $L_p(R^1)$ ,

$$V_t = (A + B)V + F(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

где  $V = V(t) : t \rightarrow v(x, t)$  – искомая, а  $F(t) : t \rightarrow f(x, t)$  – заданная функции, определенные для  $t \in [0, T[$  и со значениями в  $L_p(R^1)$ . Начальное условие (2) в  $L_p(R^1)$  переписывается в виде

$$V|_{t=0} = \Phi, \quad (9)$$

здесь  $\Phi = (\lambda I - d^2/dx^2) \varphi(x)$  – элемент пространства  $L_p(R^1)$ .

Поставленная цель – поиск решения  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2), приводит в случае замены (5) и предположения о непрерывности частных производных  $u_x(x, t)$ ,  $u_{xx}(x, t)$  при  $t \in [0, T[$ , к необходимости нахождения решения [5, с. 105], [6, с. 462] абстрактной задачи Коши (8), (9): функции  $V(t)$  непрерывной при  $t \in [0, T[$  и непрерывно дифференцируемой при  $t \in ]0, T[$  по норме банахова пространства, значения которой принадлежат области определения оператора  $A + B$  при  $t \in ]0, T[$ .

Оператор

$$A = \beta \frac{d^2}{dx^2}, \quad D(A) = D\left(\frac{d^2}{dx^2}\right),$$

является производящим оператором сжимающей аналитической полугруппы  $U(t; A)$  класса  $C_0$ , для которой справедливо представление

$$U(t; A) = U\left(t; \beta \frac{d^2}{dx^2}\right) = U\left(\beta t; \frac{d^2}{dx^2}\right). \quad (10)$$

Возмущающий оператор

$$B = -(\alpha - \beta\lambda)I + (\alpha - \beta\lambda)\lambda \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1}, \quad D(B) = L_p(R^1),$$

линеен и ограничен на всём пространстве, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы (более того – группы) класса  $C_0$ :

$$U(t; B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} B^k,$$



для которой справедливы представление

$$\begin{aligned}
 U(t; B) &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} U\left(\lambda(\alpha-\beta\lambda)t; \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right) = \\
 &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha-\beta\lambda)^k \lambda^k t^k}{k!} \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k}
 \end{aligned} \tag{11}$$

и оценка

$$\|U(t; B)\| \leq e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\alpha-\beta\lambda|^k \lambda^k t^k}{k!} \left\| \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \right\|^k.$$

Следовательно, используя оценку (4) резольвенты дифференциального оператора  $d^2/dx^2$ , приходим к заключению:

- 1) если  $\alpha - \beta\lambda \geq 0$ , то полугруппа  $U(t; B)$  является сжимающей:  $\|U(t; B)\| \leq 1$ ;
- 2) если  $\alpha - \beta\lambda < 0$ , то справедлива оценка нормы  $\|U(t; B)\| \leq e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}$ .

Дифференциальный оператор  $-\lambda I + d^2/dx^2$ ,  $\lambda > 0$ , является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса  $C_0$ , норма которой экспоненциально убывает:

$$U\left(t; -\lambda I + \frac{d^2}{dx^2}\right) = e^{-\lambda t} U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right),$$

поэтому, используя формулу [6, с. 297] для отрицательных степеней производящего оператора полугруппы с отрицательным типом найдём, для последующего использования, выражение для степеней резольвенты: ( $\lambda > 0, k = 1, 2, \dots$ )

$$\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} s^{k-1} e^{-\lambda s} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) ds. \tag{12}$$

Применяя соотношения (12), продолжим преобразование степенного ряда в (11):

- 1) если  $\alpha - \beta\lambda \geq 0$ , то

$$\begin{aligned}
 U(t; B)\psi &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[ \psi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-\beta\lambda)^k \lambda^k t^k}{(k-1)!k!} \int_0^{+\infty} s^{k-1} e^{-\lambda s} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi ds \right] = \\
 &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[ \psi + \sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} I_1\left(2\sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda st}\right) U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \right],
 \end{aligned}$$

где  $I_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$  – модифицированная функция Бесселя, а  $\psi$  – произвольный элемент пространства  $L_p(R^1)$ ;



2) если  $\alpha - \beta\lambda < 0$ , то

$$\begin{aligned}
 U(t; B)\psi &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[ \psi - \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda t} \times \right. \\
 &\times \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left( \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda st} \right)^{2k+1} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \left. \right] = \\
 &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[ \psi - \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} J_1\left(2\sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda st}\right) U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \right],
 \end{aligned}$$

где  $J_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$  — функция Бесселя.

Теперь, вводя обозначение

$$G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t) = \begin{cases} I_1\left(2\sqrt{(\alpha - \beta\lambda) \lambda st}\right) & , \quad \alpha - \beta\lambda \geq 0; \\ -J_1\left(2\sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda st}\right) & , \quad \alpha - \beta\lambda < 0, \end{cases}$$

представление для полугруппы, порождаемой оператором  $B$ , можно записать в виде

$$U(t; B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[ \psi + \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t) U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \right]. \quad (13)$$

Из полученных представлений (10) и (13) соответственно полугрупп  $U(t; A)$  и  $U(t; B)$  через полугруппу (3), порождаемую оператором  $d^2/dx^2$ , следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора  $A$  аналитической полугруппы  $U(t; A)$  класса  $C_0$  линейным ограниченным оператором  $B$ , оператор  $A + B$  с областью определения  $D(A + B) = D(A)$ , также порождает [4, с. 183], [5, с. 77, с. 81] аналитическую полугруппу  $U(t; A + B)$  класса  $C_0$ , при этом возмущённая полугруппа определяется для произвольного элемента  $\psi$  банахова пространства разложением в ряд:

$$U(t; A + B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t)\psi, \quad t \geq 0,$$

где  $U_0(t)\psi = U(t; A)\psi$  и  $U_k(t)\psi = \int_0^t U(t-s; A)BU_{k-1}(s)\psi ds$ ,  $k \geq 1$ , причём ряд абсолютно сходится, равномерно по  $t$  в любом конечном интервале положительной полуоси.

В нашем случае, возмущающий линейный ограниченный оператор  $B$  коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором  $A$ :

$$BU(t; A)\psi = U(t; A)B\psi,$$



так как этим свойством обладает резольвента  $(\lambda I - A)^{-1}$  и полугруппа  $U(t; A)$ , для любого производящего оператора  $A$  сильно непрерывной полугруппы класса  $C_0$ . Отсюда следует, что для произвольного элемента  $\psi$  банахова пространства

$$U_k(t) \psi = \frac{t^k}{k!} B^k U(t; A) \psi = \frac{t^k}{k!} U(t; A) B^k \psi$$

и, значит, справедливо представление

$$\begin{aligned} U(t; A + B) \psi &= U(t; A) U(t; B) \psi = U(t; B) U(t; A) \psi = \\ &= e^{-(\alpha - \beta\lambda)t} \left[ U\left(\beta t; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi + \right. \\ &\left. + \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t) U\left(s + \beta t; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

и оценка нормы

$$\|U(t; A + B)\| \leq \|U(t; A)\| \|U(t; B)\| \leq \begin{cases} 1, & \alpha - \beta\lambda \geq 0; \\ e^{2|\alpha - \beta\lambda|t}, & \alpha - \beta\lambda < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Итак, в абстрактном уравнении (8) коэффициент  $A + B$  является производящим оператором аналитической полугруппы (14) класса  $C_0$ . Поэтому [4, с. 170], [5, с. 104, с. 113], если норма свободного члена  $F(t)$  уравнения (8) интегрируема по промежутку  $[0, T[$ :  $\int_0^T \|F(t)\| dt < +\infty$  и функция  $F(t)$  удовлетворяет условию Гёльдера  $\|F(t) - F(s)\| \leq c(\epsilon) |t - s|^\gamma$ ,  $t, s \in [\epsilon, T[$ ,  $\epsilon, \gamma > 0$ , то абстрактная задача Коши (8), (9), для произвольного начального данного  $\Phi$  из рассматриваемого банахова пространства, имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$V = U(t; A + B) \Phi + \int_0^t U(t - \tau; A + B) F(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Принадлежность элемента  $\Phi$  пространству  $L_p(R^1)$  следует из принадлежности, как начальной функции  $\varphi(x)$ , так и функций  $d^k \varphi(x) / dx^k$ ,  $k = 1, 2$ , пространству  $L_p(R^1)$ . Соответственно, для выполнения выше приведённых требований к свободному члену  $F$  уравнения (8) достаточно, чтобы свободный член  $f(x, t)$  уравнения (1) имел интегрируемую по промежутку  $[0, T[$  норму  $\|f(x, t)\|_{L_p}$ :

$$\int_0^T \|f(x, t)\|_{L_p} dt < +\infty \quad (17)$$

и удовлетворял локальному условию Гёльдера по переменной  $t$  по норме пространства  $L_p(R^1)$ :

$$\|f(x, t) - f(x, s)\|_{L_p} \leq c(\epsilon) |t - s|^\gamma, \quad t, s \in [\epsilon, T[, \quad \epsilon, \gamma > 0. \quad (18)$$

Предполагая выполнение всех этих требований, действуя на обе части соотношения (16) оператором  $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$ ,  $\lambda > 0$ , и используя перестановочность полугруппы



$U(t; A + B)$  и резольвенты  $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$ , выводим формулу для решения уравнения (1)

$$u = U(t; A + B) \varphi(x) + \int_0^t U(t - \tau; A + B) \left( \lambda I - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} f(x, \tau) d\tau, \quad (19)$$

для которого, в силу неравенств (15), справедлива оценка

$$\begin{cases} \|u(x, t)\|_{L_p} \leq \|\varphi(x)\|_{L_p} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \|f(x, \tau)\|_{L_p} d\tau, & \alpha - \beta\lambda \geq 0; \\ \|u(x, t)\|_{L_p} \leq e^{2|\alpha - \beta\lambda|t} \|\varphi(x)\|_{L_p} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{2|\alpha - \beta\lambda|\tau} \|f(x, t - \tau)\|_{L_p} d\tau, & \alpha - \beta\lambda < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Теперь, применяя представления (14) и (12) соответственно полугруппы  $U(t; A + B)$  резольвенты  $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$  через полугруппу, порождаемую оператором  $d^2/dx^2$ , из формулы (19) имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) = & e^{-(\alpha - \beta\lambda)t} \left[ U\left(\beta t; \frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi(x) + \right. \\ & \left. + \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t) U\left(s + \beta t; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x) \frac{ds}{\sqrt{s}} \right] + \\ & + \int_0^t e^{-(\alpha - \beta\lambda)(t - \tau)} d\tau \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} U\left(r + \beta(t - \tau); \frac{d^2}{dx^2}\right) f(x, \tau) dr + \right. \\ & + \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda(t - \tau)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t - \tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} \times \\ & \left. \times \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} U\left(r + s + \beta(t - \tau); \frac{d^2}{dx^2}\right) f(x, \tau) dr \right]. \end{aligned}$$

Наконец, применяя представление (3) полугруппы, порождаемой оператором  $d^2/dx^2$ , получаем явный вид решения задачи Коши для одномерного уравнения движения грун-



ТОВЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\beta t}} \varphi(\xi) d\xi + \right. \\
 & + \left. \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t) \frac{ds}{\sqrt{s(s+\beta t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(s+\beta t)}} \varphi(\xi) d\xi \right] + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta\lambda)(t-\tau)} d\tau \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} \frac{dr}{\sqrt{r+\beta(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4[r+\beta(t-\tau)]}} f(\xi, \tau) d\xi + \right. \\
 & + \left. \sqrt{|\alpha - \beta\lambda| \lambda (t-\tau)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha, \beta, \lambda, s, t-\tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} \times \right. \\
 & \times \left. \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} \frac{dr}{\sqrt{r+s+\beta(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4[r+s+\beta(t-\tau)]}} f(\xi, \tau) d\xi \right]. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Таким образом, предполагая, что

1) решение  $u(x, t)$  задачи Коши (1), (2) удовлетворяет дополнительному требованию непрерывности частных производных  $u_x(x, t)$ ,  $u_{xx}(x, t)$  при  $t \in [0, T[$ , и, значит, требуя принадлежность начальной функции  $\varphi(x)$  и функций  $d^k\varphi(x)/dx^k$ ,  $k = 1, 2$  пространству  $L_p(R^1)$ ;

2) свободный член  $f(x, t)$  удовлетворяет условиям (17), (18); получили представление в явном виде (21) решения уравнения, моделирующего эволюцию линии свободной поверхности при фильтрации грунтовых вод, и его оценку (20) в пространстве  $L_p(R^1)$ .

Теперь выясним, каким условиям достаточно подчинить начальную функцию  $\varphi(x)$  и свободный член  $f(x, t)$  уравнения (1), чтобы формула (21) давала решение задачи Коши (1), (2).

При выводе формулы (21) от функции  $F(t)$ , а значит, и от функции  $f(x, t)$ , не требовалось выполнение каких-либо дополнительных условий, кроме тех, что возникают в общей теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве, в которых операторный коэффициент порождает аналитическую полугруппу класса  $C_0$ .

Поэтому рассмотрим функцию

$$u_0 = U(t; A + B) \varphi, \quad (22)$$

представляющую вклад начального условия (2) в формулу (19) для решения уравнения (1). Так как  $U(t; A + B)$  является аналитической полугруппой класса  $C_0$ , то [3]–[6] функция (22) для любой функции  $\varphi$  из пространства  $L_p(R^1)$ :



1) непрерывна при  $[0, T[$  по норме пространства  $L_p(R^1)$  и для неё выполняется начальное условие (2);

2) при  $t > 0$  непрерывно дифференцируема по норме пространства  $L_p(R^1)$  и значения  $U(t; A + B)\varphi$  принадлежат области определения оператора  $A + B$ , более того

$$\frac{d^k u_0}{dt^k} = (A + B)^k U(t; A + B)\varphi, \quad k = 1, 2, \dots;$$

3) при  $t > 0$

$$\begin{aligned} \left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial u_0}{\partial t} &= \left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) (A + B) u_0 = \\ &= \left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left\{ \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\alpha - \beta\lambda) \left[ I - \lambda \left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \right] \right\} u_0 = \alpha \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

т.е. функция (22) удовлетворяет уравнению (1).

Отсюда следует, что функция (22) является решением задачи Коши (1), (2). Таким образом, имеет место

**Теорема.** Пусть в задаче Коши (1), (2) для одномерного уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью начальное данное  $\varphi(x)$  принадлежит пространству  $L_p(R^1)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , а свободный член  $f(x, t)$  удовлетворяет условию (17) интегрируемости нормы в пространстве  $L_p(R^1)$  по промежутку  $[0, T[$  и локальному условию Гёльдера (18) по переменной  $t$  по норме пространства  $L_p(R^1)$ , тогда существует единственное решение этой задачи в пространстве  $L_p(R^1)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , которое представляется формулой (21) и для него справедлива оценка (20).

**Замечание.** Из оценки (20) следует непрерывная зависимость решения от начального данного на любом конечном временном отрезке, причем если  $\alpha - \beta\lambda \geq 0$ , то норма решения однородного уравнения не более нормы начального данного на всем временном промежутке рассмотрения, если же  $\alpha - \beta\lambda < 0$ , то решение может расти как  $e^{2|\alpha - \beta\lambda|t}$ .

### Литература

1. Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // ДАН СССР. — 1972. — 202;5. — С.1031-1033.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 736 с.
3. Butzer P. L., Berens H. Semi-Groups of Operators and Approximation / Grundlehren Math. Wiss., vol. 145 / New York: Springer-Verlag, 1967. — P. 318.
4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. — 464 с.
5. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / Appl. Math. Sci., vol. 44 / New York: Springer-Verlag, 1983. — P.279.



6. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. — 500 с.

**EXPLICIT SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM  
TO THE ONE DIMENSIONAL EQUATION FOR GROUNDWATER MOTION  
WITH A FREE SURFACE**

**Kh.G. Umarov**

Chechen State University,  
Sheripov St., 32, 364037, Groznyi, Russia, e-mail: [umarov50@mail.ru](mailto:umarov50@mail.ru)

**Abstract.** The linear partial differential equation modeling evolution of free surface curve of filtering liquid is under consideration. Explicit solution of the Cauchy problem is obtained by reduction of filtering problem to solution of the abstract Cauchy problem in the Banach space.

**Key words:** filtering liquid free surface, strongly continuous semi-groups of operators.



## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 511

**БИНАРНАЯ АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА  
С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [zinchenko@bsu.edu.ru](mailto:zinchenko@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Решена бинарная задача с простыми числами специального вида.

**Ключевые слова:** бинарная аддитивная задача, простые числа специального вида.

В 1940 году И.М. Виноградов, применив свой метод, в [1] решил задачу о распределении чисел вида  $\{f\sqrt{p}\}$ , где  $p$  простые числа,  $p \leq N$ ,  $f$  – действительное число,  $0 < f < 1$ .

В 1986г. С.А. Гриценко в [2], используя подход Ю.В. Линника, вывел асимптотическую формулу для числа таких простых чисел  $p$ , что

$$p \leq N, \left\{ \frac{1}{2} p^{1/c} \right\} < \frac{1}{2}, \quad (1)$$

где  $1 < c \leq 2$ .

В 1988 г. С.А. Гриценко в [3] решил тернарную проблему Гольдбаха и проблему Варинга–Гольдбаха с простыми числами вида (1). Обе эти задачи были решены по схеме решения тернарной задачи.

В работах автора [5], [6] и [7] решен ряд бинарных аддитивных задач с полупростыми числами из промежутков вида  $[(2m)^c, (2m+1)^c]$ , где  $m \in N$ , и  $c \in (1, 2]$ , то есть, удовлетворяющих неравенствам (1).

В настоящее время некоторые классические бинарные аддитивные задачи, такие как проблема делителей Титчмарша, проблема Харди–Литтлвуда и другие, в простых числах, удовлетворяющих неравенствам (1), не решены. Их решение представляет, на наш взгляд, большой интерес.

В настоящей работе впервые дается решение одной из бинарных аддитивных задач с простыми числами, удовлетворяющими неравенствам (1). Заметим, что эта задача несколько «проще» выше перечисленных нерешенных задач.

Рассмотрим известную теоретико-числовую функцию  $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда сумма  $\sum_{p \leq x} \sigma_{-\varepsilon}(p-1)$  представляет собой аналог суммы  $\sum_{p \leq x} \sigma_0(p-1)$ , получение асимптотической формулы для которой составляет проблему делителей Титчмарша. Мы накладываем на простые числа, по которым ведется суммирование дополнительное ограничение: они должны удовлетворять неравенствам (1).

Таким, образом, мы изучаем сумму вида

$$\sum_{p \leq x, \left\{ \frac{1}{2} p^{1/c} \right\} \leq \frac{1}{2}} \sigma_{-\varepsilon}(p-1). \quad (2)$$



Сумму (2) можно рассматривать как число решений диофантова уравнения

$$\begin{cases} p - 1 = uv, \\ p \leq x \end{cases}$$

в простых числах  $p$ , удовлетворяющих неравенствам (1) и натуральных числах  $u$  и  $v$ , причем каждое решение этого уравнения берется с весом  $\sigma_{-\varepsilon}(p - 1)$ .

Задачу получения асимптотики для числа решений такого рода диофантова уравнения в теории чисел принято называть бинарной аддитивной задачей.

В настоящем сообщении статье получена асимптотическая формула для для суммы (2).

**Теорема.** Пусть  $c > 1$  – произвольное число,  $\varepsilon > 0$  и  $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$ . Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x, \{\frac{1}{2}p^{1/c}\} \leq \frac{1}{2}} \sigma_{-\varepsilon}(p - 1) = \frac{1}{2}c_0 \text{Li}(x) + O_{\varepsilon,c}(x \ln^{-c} x),$$

где

$$c_0 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q)q^{\varepsilon}},$$

а  $\varphi(n)$  – значение функции Эйлера.

□ Пусть  $\Delta = (\ln x)^{-c-1}$ ,  $r = [\ln x]$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  – «стаканчики» Виноградова, соответствующие параметрам  $\alpha = \Delta$ ,  $\beta = 1 - \Delta$ ,  $r$ ,  $\Delta$  и  $\alpha = -\Delta$ ,  $\beta = 1 + \Delta$ ,  $r$ ,  $\Delta$ , соответственно. Тогда

$$D_1(x) \leq \sum_{p \leq x} \sigma_{-\varepsilon}(p - 1) \leq D_2(x), \tag{3}$$

где

$$D_{\nu}(x) = \sum_{p \leq x} \sigma_{-\varepsilon}(p - 1) \psi_{\nu} \left( \frac{1}{2}p^{1/c} \right), \quad \nu = 1, 2.$$

Выведем асимптотическую формулу для  $D_1(x)$ .

По определению имеем

$$\begin{aligned} D_1(x) &= \sum_{p \leq x} \psi_1 \left( \frac{1}{2}p^{1/c} \right) \sum_{q|(p-1)} q^{-\varepsilon} = \sum_{q \leq x-1} q^{-\varepsilon} \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} \psi_1 \left( \frac{1}{2}p^{1/c} \right) = \\ &= \sum_{q \leq x^{0,01(1-c^{-1})}} q^{-\varepsilon} \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} \psi_1 \left( \frac{1}{2}p^{1/c} \right) + O \left( x^{1-0,01(1-c^{-1})\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Разложим  $\psi_1(x)$  в ряд Фурье и воспользуемся свойствами коэффициентов Фурье:

$$D_1(x) = \sum_{q \leq x^{0,01(1-c^{-1})}} \sum_{|m| \leq \Delta^{-1} \ln x} c_m \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} e^{i\pi m p^{1/c}} + O \left( x^{1-0,01(1-c^{-1})\varepsilon} \right).$$



Выделим нулевой коэффициент:

$$D_1(x) = \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\right) \sum_{q \leq x^{0,01}} q^{-\varepsilon} \pi(x, q, 1) + \\ + O\left(\sum_{q \leq x^{0,01(1-c^{-1})}} \sum_{1 \leq m \leq \Delta^{-1} \ln x} m^{-1} \left| \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right|\right) + O(x^{1-0,001\varepsilon}).$$

Для оценки первого остатка преобразуем внутреннюю сумму:

$$\sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv 1 \pmod{q}}} e^{i\pi m p^{1/c}} = \sum_{p \leq x} e^{i\pi m p^{1/c}} q^{-1} \sum_{b=1}^q e^{2\pi i \frac{p-1}{q} b} = \\ = \frac{1}{q} \sum_{b=1}^q e^{-2\pi i \frac{b}{q}} \sum_{p \leq x} e^{i\pi m p^{1/c} + 2\pi i \frac{b}{q} p}.$$

В статье С.А. Гриценко [7] доказано, что при любых  $0 < m \leq 2x^{(1-c^{-1})/6} \ln x$  и при любых действительных  $\alpha_1$  справедлива оценка

$$\left| \sum_{p \leq x} e^{\pi i m p^{1/c} + 2\pi i \alpha_1 p} \right| = O(x^{1-(1-1/c)/6} \ln^{4,5} x).$$

Пользуясь этой формулой, получаем, что

$$D_1(x) = \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\right) \sum_{q \leq x^{0,01}} q^{-\varepsilon} \pi(x, q, 1) + O(x^{1-0,01(1-1/c)\varepsilon}).$$

Применим теорему Бомбьери-Виноградова

$$\sum_{q \leq x^{0,01(1-1/c)}} q^{-\varepsilon} \pi(x, q, 1) = \sum_{q \leq x^{0,01(1-1/c)}} \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} q^{-\varepsilon} + \\ + O\left(\sum_{q \leq x^{0,01}} \left| \pi(x, q, 1) - \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} \right|\right) = \text{Li}(x) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{-\varepsilon}} + O(x \ln^{-c} x).$$

Итак, мы получили, что

$$D_1(x) = \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\right) \text{Li}(x) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{\varepsilon}} + O(x \ln^{-c} x) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{\varepsilon}} + O(x \ln^{-c} x).$$

Такая же формула справедлива и для  $D_2(x)$ , что доказывается аналогично. Теперь утверждение теоремы сразу следует из неравенств (3). ■



### Литература

1. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сборник. – 1940. – 7. – С.365-372.
2. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Математические заметки. – 1986. – 39;5. – С.625-640.
3. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. – 1988. – 43;4(262). – С.203-204.
4. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. – 2005. – VI;2(14). – С.145-162.
5. Зинченко Н.А. Две бинарные аддитивные задачи // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – 3. – С.352-354.
6. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика, информатика. – 2007. – 7;1. – С.9-13.
7. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Изв. РАН, Сер. матем. – 1992. – 56;4. – С.1198-1216.

### BINARY ADDITIVE PROBLEM WITH SPECIFIC PRIME NUMBERS

N.A. Zinchenko

Belgorod State University,  
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [zinchenko@bsu.edu.ru](mailto:zinchenko@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The binary additive problem with specific prime numbers is solved.

**Key words:** binary additive problem, specific prime numbers.



УДК 511.5

## ПИФАГОРОВЫ И ФИБОНАЧЧЕВЫ ТРОЙКИ

А.В. Лаптев

Владимирский Государственный университет,  
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: [Oxoron30189@yandex.ru](mailto:Oxoron30189@yandex.ru)

**Аннотация.** Для кругового умножения Фибоначчи исследуется аналог уравнений Пифагора, найдены два бесконечных семейства решений.

**Ключевые слова:** Умножение Фибоначчи, фибоначчевы тройки,  $\delta$ -функция.

### 1. Введение

Матиясевич Ю.В. [1] и, независимо, Кнут Д. [2], ввели новую операцию умножения  $A \circ B$  на множестве натуральных чисел. Матиясевич использовал её в ходе доказательства 10-й проблемы Гильберта, Кнут – в связи с задачами программирования. Операция кругового умножения оказалась полезна в других задачах теории чисел. Журавлевым В.Г. ([3], [4]) были рассмотрены диофантовы уравнения второй степени с круговым умножением. В настоящей работе исследуется круговой аналог

$$A^{\circledast} + B^{\circledast} = C^{\circledast} \quad (1)$$

уравнения Пифагора

$$A^2 + B^2 = C^2. \quad (2)$$

### 2. Операция кругового умножения

Последовательность Фибоначчи задается следующим образом  $F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n > 2$ . Пусть даны числа  $A, B \in \mathbb{N}$ . Разложим их по жадному алгоритму

$$A = \sum_i \varepsilon_i F_i, \quad B = \sum_j \varepsilon'_j F_j, \quad \varepsilon_i, \varepsilon'_j = 0, 1.$$

Тогда для  $A$  и  $B$  можно задать операцию кругового умножения Фибоначчи [1]

$$A \circ B = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon'_j F_{i+j}. \quad (3)$$

Из определения (3) следует, что операция  $A \circ B$  коммутативна, однако она не является ассоциативной. Например,  $4 \circ (4 \circ 2) \neq (4 \circ 4) \circ 2$ . Условия для выполнения ассоциативности будут рассмотрены в п. 3.

Для операции (3) существует другое представление [3]:

$$A \circ B = AB + [(A + 1)\tau][(B + 1)\tau], \quad (4)$$

где  $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$  – золотое сечение,  $[x]$  – целая часть  $x$ .



о-квадратом натурального  $A$  станем называть выражение

$$A^{\circledast} = A \circ A. \tag{5}$$

Аналогично тройкам Пифагора (2) будем говорить, что числа  $(A, B, C)$  образуют фибоначчеву тройку, если справедливо равенство (1).

**Теорема 1.** *Количество фибоначчевых троек бесконечно.*

□ Рассмотрим выражение

$$(F_n)^{\circledast} + (F_{n-2} + F_{n+1})^{\circledast} = F_{2n} + F_{2n-4} + F_{2n-1} + F_{2n-1} + F_{2n-2} = F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n+3}.$$

С другой стороны,

$$(F_{n-1} + F_{n+1})^{\circledast} = F_{2n-2} + F_{2n} + F_{2n} + F_{2n+2} = F_{2n-2} + F_{2n-2} + F_{2n+3}.$$

Отсюда делаем вывод, что

$$(F_n)^{\circledast} + (F_{n-2} + F_{n+1})^{\circledast} = (F_{n-1} + F_{n+1})^{\circledast}, \quad \forall n > 2,$$

что дает нам бесконечное количество фибоначчевых троек. ■

### 3. $\delta$ -функция

В дальнейшем нам потребуется специальная функция [3]

$$\delta(x) = x - [(x + 1)\tau]\tilde{\tau}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \tag{6}$$

Эта функция периодична, период равен  $\tilde{\tau}$ . Разобьем числовую ось на полуинтервалы  $[k\tilde{\tau} - 1, k\tilde{\tau} + \tau)$ . Для каждого  $x$  величина  $[(x + 1)\tau]$  характеризует интервал  $k$ , в котором находится  $x$ . Сама функция описывает отклонение аргумента от точки  $k\tilde{\tau}$ , и строго возрастает на каждом полуинтервале. Легко видеть, что

$$\delta(x) \in [-1, \tau). \tag{7}$$

**Свойство 1.** *Если  $\delta(x) < \tau - 1$ , то  $\delta(x + 1) = 1 + \delta(x)$ . В противном случае  $\delta(x + 1) = \delta(x) - \tau$ .*

□ Если  $\delta(x) < \tau - 1$ , точка  $1 + x$  будет находится в том же полуинтервале, что и  $x$ :  $[(x + 1)\tau] = [(x + 2)\tau]$ . Воспользовавшись (6) получаем

$$\delta(x + 1) - \delta(x) = x + 1 - [(x + 2)\tau] - x + [(x + 1)\tau] = 1.$$

Второй случай доказывается аналогично. ■

Прямым следствием свойства 1 является тот факт, что для любого натурального  $n$

$$\delta(n) = a - b\tau, \quad n = a + b; \quad a, b \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Однозначность такого представления вытекает из (7). Для доказательства достаточно заметить, что  $\delta(1) = -\tau$ . ■

Нетрудно проверить следующие два свойства.

**Свойство 2.**  $n_1 = n_2$  тогда и только тогда, когда  $\delta(n_1) = \delta(n_2)$ .



**Свойство 3.**  $\delta(x) + \delta(y) \equiv \delta(x + y) \pmod{\tilde{\tau}}$ .

Докажем, что имеет место

**Свойство 4.** Для любого натурального  $n$  выполняется равенство

$$\delta(F_n) = (-\tau)^n. \quad (9)$$

□ Доказательство будем проводить по индукции.  $\delta(F_1) = 1 - \tilde{\tau} = \tau$ .  $\delta(F_2) = 2 - \tilde{\tau} = 1 - \tau = \tau^2$  (тут мы применили тот факт, что  $\tau^2 + \tau - 1 = 0$ ). Предположим наше свойство справедливым при  $n = k, n = k + 1$ . Тогда:  $\delta(F_{k+2}) = \delta(F_{k+1} + F_k) \equiv (\delta(F_{k+1}) + \delta(F_k)) \pmod{\tilde{\tau}}$ .  $|\delta(F_{k+1})|, |\delta(F_k)| < \tau$ ,  $\delta$ -функция принимает в точках  $F_{k-1}, F_k$  значения разных знаков, что ведет за собой  $\delta(F_{k+2}) = \delta(F_{k+1}) + \delta(F_k) = (-\tau)^{k+1} + (-\tau)^k = (-\tau)^k(1 - \tau) = (-\tau)^k(-\tau)^2 = (-\tau)^{k+2}$ . Итак, наше свойство справедливо при  $n = k + 2$ , что и завершает доказательство. ■

**Лемма 1.** Пусть  $A = \sum_i \varepsilon_i F_i$ ,  $\varepsilon_i = 0, 1$ . Тогда  $\delta(A) = \sum_i \delta(F_i) \varepsilon_i$ .

□ Согласно третьему свойству  $\delta(A) \equiv \left( \sum_i \delta(F_i) \varepsilon_i \right) \pmod{\tilde{\tau}}$ . Таким образом, остается лишь доказать, что  $\sum_i \delta(F_i) \varepsilon_i \in [-1, \tau)$ . Для этого рассмотрим сумму всех членов последовательности Фибоначчи с нечетными номерами.  $\sum_i \delta(F_{2i+1}) = (-\tau) + (-\tau)^3 + (\tau)^5 + \dots = -\tau / (1 - \tau^2) = -1$ . Добавление других слагаемых может лишь увеличить значение нашей суммы, следовательно, любая сумма  $\sum_i \delta(F_i) \varepsilon_i > -1$ . Аналогично рассматривается случай для верхней границы. ■

**Теорема 2.** Круговое и обычное умножения связаны следующей формулой:

$$\delta(A \circ B) = \begin{cases} \delta(A)\delta(B) & \text{при } \delta(A)\delta(B) \in [-1, \tau), \\ \delta(A)\delta(B) - \tilde{\tau} & \text{при } \delta(A)\delta(B) \in [\tau, 1]. \end{cases}$$

□ Пусть  $A = F_{a_1} + F_{a_2} + \dots + F_{a_k}$ ,  $B = F_{b_1} + F_{b_2} + \dots + F_{b_l}$ . Тогда

$$A \circ B = (F_{a_1+b_1} + F_{a_1+b_2} + \dots + F_{a_1+b_l}) + \dots + (F_{a_k+b_1} + F_{a_k+b_2} + \dots + F_{a_k+b_l}).$$

Согласно лемме

$$\delta(A \circ B) \equiv \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (-\tau)^{a_i+b_j} = \left( \sum_{i=1}^k (-\tau)^{a_i} \right) \left( \sum_{j=1}^l (-\tau)^{b_j} \right) \equiv \delta(A)\delta(B) \pmod{\tilde{\tau}}.$$

В силу (7),  $\delta(A)\delta(B) \in [-1, 1]$ . Очевидно, в случае  $\delta(A)\delta(B) \in [-1, \tau)$  справедливо равенство  $\delta(A \circ B) = \delta(A)\delta(B)$ , иначе верно  $\delta(A \circ B) = \delta(A)\delta(B) - \tilde{\tau}$ . ■

Интерпретируем Теорему 2, используя представление (8). Пусть  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $\delta(x) = a - b\tau$ ,  $\delta(y) = c - d\tau$ . Тогда по Теореме 2, имеем

$$\delta(x \circ y) = \begin{cases} (ac + bd) - (ad + bc + bd)\tau & \text{при } \delta(x)\delta(y) \in [-1, \tau); \\ (ac + bd - 1) - (ad + bc + bd + 1)\tau & \text{при } \delta(x)\delta(y) \in [\tau, 1]. \end{cases} \quad (10)$$

Полученная формула (10) объясняет неассоциативность умножения Фибоначчи: в зависимости от порядка операций могут использоваться разные варианты (10). Кроме того, можно указать условие, при котором порядок операций не повлияет на конечный результат. Достаточно, чтобы  $\delta$ -функция любого из множителей принимала значения от  $-\sqrt{\tau}$  до  $\sqrt{\tau}$ .



#### 4. Семейства фибоначчевых троек

Согласно теореме 2 все фибоначчевы тройки  $(A, B, C)$  можно разделить на два семейства, для которых соответственно, выполняются соотношения

$$\delta^2(A) + \delta^2(B) = \delta^2(C), \tag{11}$$

$$\delta^2(A) + \delta^2(B) = \delta^2(C) + \tilde{\tau}. \tag{12}$$

Равенство (11) дает нам возможность размножить тройки, исходя из одной начальной.

**Теорема 3.** Пусть тройка  $(A, B, C)$  удовлетворяет условию (11). Тогда тройка  $(kA, kB, kC)$  также образует фибоначчевую тройку при любом  $k$ , удовлетворяющем условиям  $k\delta(A), k\delta(B), k\delta(C) \in [-1, \tau), k \in \mathbb{N}$ .

Для доказательства достаточно заметить, что  $(k\delta(A))^2 + (k\delta(B))^2 = (k\delta(C))^2$ .

**Теорема 4.** Пусть тройка  $(A, B, C)$  удовлетворяет условию (11). Тогда тройка  $(D \circ A, D \circ B, D \circ C)$  также образует фибоначчевую тройку при любом  $D$ , удовлетворяющем условиям  $\delta(D)\delta(A), \delta(D)\delta(B), \delta(D)\delta(C) \in [-1, \tau), D \in \mathbb{N}$ .

Доказательство аналогично теореме 3.

В результате, взяв некоторую начальную тройку  $(A, B, C)$ , мы можем получить бесконечное семейство троек вида  $(k(A \circ D), k(B \circ D), k(C \circ D))$ .

**Теорема 5.** Множество троек, удовлетворяющих условию (12), бесконечно.

□ Рассмотрим уравнение вида  $X^{\otimes} + Y^{\otimes} = (Y + 1)^{\otimes}$ . Согласно (4) имеем

$$X^{\otimes} + [(Y + 1)\tau]^2 = 2Y + 1 + [(Y + 2)\tau]^2.$$

Заметим, что  $[(Y + 2)\tau] = [(Y + 1)\tau]$  при  $\delta(Y) < -\tau^2$ . Отсюда

$$Y = \frac{X^{\otimes} - 1}{2} \quad \text{при} \quad \delta(Y) < -\tau^2. \tag{13}$$

Осталось лишь решить сравнение  $X^{\otimes} \equiv 1 \pmod{2}$ . Легко видеть, что  $F_n \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3}$ , откуда

$$F_{2n} \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3}; \\ n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \tag{14}$$

Обратим внимание, что тройка  $(4, 12, 13)$  принадлежит семейству (13). Заметим, что  $(4 + F_n)^{\otimes} = 4^{\otimes} + F_{2n} + 2F_{n+1} + 2F_{n+3}$  и  $4^{\otimes} + F_{2n} + 2F_{n+1} + 2F_{n+3} \equiv 1 + F_{2n} \pmod{2}$ . Нетрудно показать, что при достаточно больших  $n \equiv 1 \pmod{3}$  получаем фибоначчевы тройки вида (13)

$$(4 + F_n)^{\otimes} + \frac{(4 + F_n)^{\otimes} - 1}{2} = \frac{(4 + F_n)^{\otimes} + 1}{2}. \quad \blacksquare$$

#### 5. Заключение

Хорошо известно, что тройки Пифагора (2) допускают параметризацию

$$A = \frac{U^2 - V^2}{2}, \quad B = UV, \quad C = \frac{U^2 + V^2}{2},$$



где  $U, V \in \mathbb{Z}$ ,  $U \equiv V \pmod{2}$ . Фибоначчевы тройки из семейства (11) также можно параметризовать аналогичным образом. Возникает задача поиска минимального слагаемого  $F_k$  в разложениях параметров  $U$  и  $V$ , при котором параметризация

$$A = \frac{U^{\circledast} - V^{\circledast}}{2}, \quad B = U \circ V, \quad C = \frac{U^{\circledast} + V^{\circledast}}{2},$$

где  $U, V \in \mathbb{N}$ ,  $U > V$ ,  $U^{\circledast} \equiv V^{\circledast} \pmod{2}$ , будет порождать фибоначчевы тройки (1).

Изложенные в статье методы приводят к необходимости исследования диофантова уравнения  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  над квадратичным кольцом Фибоначчи  $\mathbb{Z}[\tau]$ . Для этого можно воспользоваться хорошо разработанной арифметической теорией квадратичных форм [5].

### Литература

1. Матиясевич Ю.В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гильберта // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1968. – 8. – С.132-144.
2. Knuth D.E. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. – 1988. – 1. – С.57-60.
3. Журавлев В.Г. Суммы квадратов над  $\circ$ -кольцом Фибоначчи // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2006. – 337. – С.165-190.
4. Журавлев В.Г. Уравнение Пелля над  $\circ$ -кольцом Фибоначчи // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2007. – 350. – С.139-159.
5. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы / М.: Мир, 1982.

## PYTHAGOREAN AND FIBONACCI's TRIPLES

A.V. Laptev

Vladimir State University,  
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: [Oxoron30189@yandex.ru](mailto:Oxoron30189@yandex.ru)

**Abstract.** The analog of Pythagorean's triples for Fibonacci's  $\circ$ -multiplication is under consideration and two infinite sets of the solutions are found.

**Key words:** Fibonacci's multiplication, Fibonacci's triples,  $\delta$ -function.



УДК 517.9

**НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ СРЕДНЕГО  
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

**И.П. Половинкин** <sup>18)</sup>

Воронежский государственный университет,  
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: [polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru) <sup>19)</sup>

**Аннотация.** Рассмотрены некоторые способы получения формул среднего для уравнений со спектральным параметром из известных формул среднего.

**Ключевые слова:** формула среднего, теорема о среднем.

**Определение.** Пусть  $P(w)$  – многочлен порядка  $m$ . Финитное распределение (см. [1])  $\Phi$  назовем сопровождением уравнения

$$P(D)u = 0$$

с дифференциальным оператором  $P(D)$ , если для любого решения  $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  имеет место равенство

$$\langle \Phi, u \rangle = 0,$$

называемое формулой среднего для этого уравнения.

Далее,  $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial^2 / \partial x_k^2$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon(\rho) = 1/(|S_n|(2-n)\rho^{n-2})$ , если  $n \geq 3$ ,  $\epsilon(\rho) = \ln \rho / (2\pi)$ , если  $n = 2$ ,  $\epsilon(|x|)$  – фундаментальное решение оператора Лапласа,  $S_R(x_0)$  – сфера в  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $R$ ,  $B_R(x_0)$  – шар с границей  $S_R(x_0)$ ,  $|S_n|$  – площадь сферы  $S_1(0)$ . Через  $\delta(x-x_0)$  обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке  $x_0$ , через  $\delta_{S_R(x_0)}(x)$  – мера Дирака, сосредоточенная на сфере  $S_R(x_0)$ .

**Теорема 1** [2]. Для того, чтобы финитное распределение  $\Phi$  являлось сопровождением оператора  $P(D)$ , необходимо и достаточно, чтобы имело место представление  $\hat{\Phi}(w) = P(-w)\hat{\psi}(w)$ ,  $w \in \mathbb{C}^n$ , где  $\hat{\psi}(w)$  – целая аналитическая функция,  $\hat{\Phi}(w)$  – образ Фурье распределения  $\Phi$ .

Далее  $P(w)$  – сумма одночленов с одинаковой четностью.

**Теорема 2** [2]. Пусть известно некоторое сопровождение  $\Phi(x)$  оператора  $P(D)$ . Пусть  $u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  – решение в  $\mathbb{R}^n$  уравнения  $P(D)u_0 + \lambda u_0 = 0$ . Тогда справедлива формула среднего  $\langle \Phi + (-1)^m \lambda \psi, u_0 \rangle = 0$ , где  $\psi(x)$  – прообраз Фурье функции  $\hat{\psi}(w)$ .

Эти теоремы позволяют вывести формулу среднего для собственных функций оператора, зная формулу среднего для самого оператора. Ниже приводится пример, в котором предложенная схема реализуется.

**Теорема 3.** Решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

<sup>18</sup>Половинкин И.П., канд.физ.-мат. наук, доцент Воронежского государственного университета.

<sup>19</sup>Старооскольский технологический институт (филиал «Московского института стали и сплавов»), мк р-он Макаренко, 42, г. Старый Оскол, Белгородская область, 309516, Россия



удовлетворяет формуле среднего значения

$$u(x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y) dS_y + \lambda \int_{B_R(x_0)} (\epsilon(|x - x_0|) - \epsilon(R)) u(y) dy = 0.$$

□ Хорошо известна формула среднего для гармонической функции

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u(x) dS_x.$$

Из нее следует, что распределение

$$\Phi(x) = \delta(x - x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \delta_{S_R(x_0)}(x)$$

является сопровождающим оператор Лапласа  $\Delta$ . Поэтому для оператора  $(\Delta + \lambda)$  можно указать сопровождающее распределение вида  $\Phi_0 = \Phi + \lambda\psi$ , где

$$\psi(x) = \left( -\frac{\widehat{\Phi}(\xi)}{|\xi|^2} \right)^\vee = \epsilon(|x|) * \Phi(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \epsilon(|x|) * \left( \delta(x - x_0) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \delta_{S_R(x_0)}(x) \right) = \\ &= \epsilon(|x - x_0|) - \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \epsilon(|x|) * \delta_{S_R(x_0)}(x). \end{aligned}$$

Вычислим второе слагаемое. Пусть

$$g(x) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \epsilon(|x|) * \delta_{S_R(x_0)}(x) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} \epsilon(|x - y|) dS_y.$$

Если  $|x - x_0| > R$ , то функция  $v(y) = \epsilon(|x - y|)$  гармонична в окрестности шара (круга)  $|y - x_0| \leq R$ . Поэтому по теореме о среднем гармонической функции  $g(x) = \epsilon(|x - x_0|)$ , а значит  $\psi(x) = 0$ .

Пусть теперь  $|y - x_0| < R$ . Обозначим через  $\tilde{x}$  точку, симметричную точке  $x$  относительно сферы  $S_R(x_0)$ , то есть точку, лежащую на луче  $x_0x$ , для которой

$$|x - x_0| \cdot |\tilde{x} - x_0| = R^2,$$

Последнее равенство означает еще и подобие треугольников  $x_0xy$  и  $yx_0\tilde{x}$ , что позволяет переписать его в расширенном виде:

$$\frac{|\tilde{x} - x_0|}{R} = \frac{R}{|x - x_0|} = \frac{|y - \tilde{x}|}{|y - x|}.$$

Отсюда

$$|y - x| = \frac{|x - x_0| \cdot |y - \tilde{x}|}{R},$$



а, следовательно,

$$g(x) = \frac{1}{|S_n|R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} \epsilon \left( \frac{|x - x_0| \cdot |y - \tilde{x}|}{R} \right) dS_y.$$

Функция  $\epsilon(|x - x_0| \cdot |y - \tilde{x}|/R)$ , рассматриваемая как функция переменной  $y$ , является гармонической в окрестности шара (круга)  $|y - x_0| \leq R$ . Поэтому по теореме о среднем гармонической функции

$$g(x) = \epsilon \left( \frac{|x - x_0| \cdot |x_0 - \tilde{x}|}{R} \right) = \epsilon(R).$$

Поэтому при  $|y - x_0| < R$

$$\psi(x) = \epsilon(|x - x_0|) - \epsilon(R).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

Еще один способ получения формул среднего значения основан на методе спуска Адамара. Приведем пример его использования. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 u = 0.$$

Пусть функция  $u(x, t)$  является регулярным решением этого уравнения. Тогда функция

$$v(x, z, t) \equiv e^{cz} u(x, t)$$

является регулярным решением двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

что проверяется непосредственной подстановкой. Из формулы Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения с двумя пространственными переменными вытекает равенство

$$u(x, t) + u(x, -t) = \frac{1}{\pi} \int_{x-t}^{x+t} u(\xi, 0) d\xi \int_{z-\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}^{z+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}} \frac{e^{c(\eta-z)} d\eta}{\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - z)^2}}.$$

Внутренний интеграл в последней формуле вычисляется и с учетом этого мы получим формулу среднего для функции  $u(x, t)$

$$u(x, t) + u(x, -t) = \frac{1}{\pi} \int_{x-t}^{x+t} u(\xi, 0) \left( I_0(c\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2}) - L_0(c\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2}) \right) d\xi,$$

где

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m + \nu + 1)}$$

– модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ,

$$L_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+\nu+1}}{\Gamma(m + 3/2) \Gamma(m + \nu + 3/2)}$$



– модифицированная функция Струве порядка  $\nu$ .

### Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1 / М.: Мир, 1986. – 464 с.
2. Мешков В.З., Половинкин И.П. О получении новых формул среднего значения для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2011. – 47;12. – С.1724-1731.

### SOME MEAN VALUE FORMULAS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SPECTRAL PARAMETER

I.P. Polovinkin

Voronezh State University,

Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: [polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru) <sup>20)</sup>

**Abstract.** Some methods of mean value formulas obtaining based on known ones are proposed. It is done for equations with a spectral parameter.

**Key words:** mean value formulas, mean value theorems.

---

<sup>20</sup>Technological Institute (department of Moscow Institute of Steel and Alloys) at Stary Oskol, district Makarenko, 42, Stary Oskol, Belgorod region, 309 516, Russia.



УДК 517.9

## ОПЕРАЦИЯ В-ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

А.А. Феоктистова

Липецкий государственный педагогический университет,  
Ленина ул., 42, Липецк, 398050, Россия, e-mail: [alek-feoktistova@yandex.ru](mailto:alek-feoktistova@yandex.ru)

**Аннотация.** В данной работе вводится операция В-лиувиллевого типа, порожденная преобразованием Фурье-Бесселя. На основе этой операции введено понятие регулярной весовой обобщенной функции и получено представление В-лиувиллево-операции в виде смешанной обобщенной свертки с весовым ядром Бесселя-Макдональда.

**Ключевые слова:** преобразование Фурье-Бесселя, ядро Бесселя-Макдональда, операция лиувиллевого типа.

### Введение

Операции лиувиллевого типа (обычно обозначается  $I_r$ ), определяемые ядрами Бесселя-Макдональда, носят универсальный характер. С.М. Никольский в [1] использует операцию  $I_r$  для интегрального представления функций из классов Лиувилля, Бесова, Никольского. Весовые ядра Бесселя-Макдональда (сокращенно –  $\gamma$ -ядра) возникают по классической схеме, как прообраз Фурье-Бесселя функции  $(1 + |\xi|^2)^{-r/2}$ . Некоторые их свойства исследованы в работах Л.Н. Ляхова [2], [3], М.В. Половинкиной [4]. В данной работе исследуется операция В-лиувиллевого типа, порожденная преобразованием Фурье-Бесселя. Следуя [1], вводится понятие регулярной в смысле  $L_p^\gamma$  весовой обобщенной функции, установлено представление операции В-лиувиллевого типа в виде смешанной обобщенной свертки. При этом использовались методы исследования классических операций лиувиллевого типа из книги С.М. Никольского [1].

Пусть  $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$ ,  $1 \leq n < N$ . Введем обозначения  $u = (x, y)$ ,  $x \in R_n^+$ ,  $y \in R_{N-n}$ . Переменную  $x$  размерности  $n$ , по смыслу рассматриваемых здесь задач, будем называть весовой.

Через  $S_{ev} = S_{ev}(R_N^+)$  обозначим подпространство пространства Шварца основных функций  $S(R_N)$ , состоящее из функций, четных по каждой из весовых переменных  $u_i$  и  $u_j$ ,  $i = 1, \dots, k$  и  $j = n+1, \dots, n+m$ . Пространство весовых обобщенных функций  $S'_{ev} = S'_{ev}(R_N^+)$  определяется на основе весовой линейной формы

$$(f, \varphi)_\gamma = \int_{R_N^+} f(u) \varphi(u) u^\gamma du,$$

где  $\gamma > 0$  фиксировано.

Через  $L_p^\gamma(R_N^+)$  для  $1 \leq p \leq \infty$  будем обозначать банахово пространство, состоящее из измеримых на  $R_N^+$  функций  $\varphi(u)$ , для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} = \left( \int_{R_N^+} |\varphi(u)|^p u^\gamma du \right)^{\frac{1}{p}},$$



где  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $u^\gamma = \prod_{i=1}^n u_i^{\gamma_i}$ , а показатель  $\gamma_i$  равен индексу соответствующего сингулярного дифференциального оператора Бесселя

$$B_{u_i} = \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + \frac{\gamma_i}{u_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} = u_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( u_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \right), \quad \gamma_i > 0.$$

Смешанное преобразование Фурье-Бесселя определяется следующим выражением

$$\widehat{\varphi}(v) = F_B[\varphi](v) = \int_{R_N^+} \varphi(u) j_\gamma(x, \xi) e^{-i\langle y, \eta \rangle} x^\gamma du, \quad v = (\xi, \eta) \in R_n^+ \times R_{N-n},$$

где по весовым переменным  $x$  применяется преобразование Фурье-Бесселя, а по переменным  $y$  – преобразование Фурье. При этом мы используем обозначение

$$j_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(u_i v_i),$$

в котором  $j_\nu$  – j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода равенством

$$j_\nu(u_i) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu / u_i^\nu.$$

Как известно (см. [5]), смешанное преобразование Фурье-Бесселя обратимо в классе функций  $S_{ev}(R_N^+)$ , обратное преобразование определяется выражением

$$\varphi(u) = F_B^{-1}[\varphi](u) = A(N, n, \gamma) F_B[\varphi](-u),$$

где

$$A(N, n, \gamma) = A = 2^{n-|\gamma|} (2\pi)^{n-N} \prod_{i=1}^n \Gamma^{-2} \left( \frac{\gamma_i + 1}{2} \right).$$

Обобщенный сдвиг  $T_{u_i}^h$  по одной из весовых переменных, действует по формуле

$$T_{u_i}^{v_i} : f \rightarrow (T_{u_i}^{v_i} f)(u) = \frac{\Gamma \left( \frac{\gamma_i + 1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\gamma_i}{2} \right)} \times \\ \times \int_0^\pi f \left( u_1, \dots, u_{i-1}, u_i \xrightarrow{\alpha_i} v_i, u_{i+1}, \dots, u_N \right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_i,$$

и введено обозначение  $u_i \xrightarrow{\alpha_i} v_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 - 2u_i v_i \cos \alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Смешанный обобщенный сдвиг определим выражением

$$(T^v f)(u) = \prod_{i=1}^n T_{u_i}^{v_i} f(x', x'' - t).$$

Обобщенной сверткой функций  $f, g \in L_p^\gamma(R_N^+)$  будем называть (см. [5])

$$(f * g)_\gamma(u) = \int_{R_N^+} f(v) T_u^v g(u) v^\gamma dv.$$



### 1. Операция В-лиувиллевого типа

Операцию  $F = I_{\gamma,r} f = F_B^{-1} \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[f] \right]$ , отвечающую действительному числу  $r$ , будем называть *операцией В-лиувиллевого типа*. Поскольку функция  $[(1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}}]$  является мультипликатором основного пространства  $S_{ev}$ , то эта операция отображает  $S'_{ev}$  на себя взаимно однозначно.

Пусть  $r$  и  $\rho$  — произвольные действительные числа и  $f \in S'_{ev}(R_N^+)$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_{\gamma,r+\rho} f &= F_B^{-1} \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} (1 + |v|^2)^{-\frac{\rho}{2}} F_B[f] \right] = \\ &= F_B^{-1} \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[I_{\gamma,\rho} f] \right] = I_{\gamma,r} I_{\gamma,\rho} f. \end{aligned}$$

Таким образом, операция  $I_{\gamma,r}$  обладает полугрупповым свойством. Кроме того, для  $\rho = -r$  имеем  $I_{\gamma,r} I_{\gamma,-r} f = I_{\gamma,0} f = f$ , т.е. операции  $I_{\gamma,r}$  и  $I_{\gamma,-r}$  взаимно обратны.

**Лемма.** Для функций  $f \in L_p^\gamma(R_N^+)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) операция  $I_{\gamma,r}$  при  $r > 0$  сводится к обобщенной свертке

$$F = I_{\gamma,r} f(u) = (G_\gamma^r * f)_\gamma = \int_{R_N^+} f(v) T_u^v G_\gamma^r(u) v^\gamma dv, \tag{1}$$

с весовым ядром Бесселя-Макдональда  $G_\gamma^r = F_B^{-1} (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}}$ .

□ Для  $f \in L_p^\gamma(R_N^+)$ ,  $\varphi \in S_{ev}(R_N^+)$  имеем

$$(I_{\gamma,r} f, \varphi)_\gamma = \left( f, F_B \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B^{-1}[\varphi] \right] \right)_\gamma. \tag{2}$$

По определению обратного смешанного преобразования Фурье-Бесселя

$$\begin{aligned} F_B \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B^{-1}[\varphi](v) \right] &= A F_B \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[\varphi](-v) \right] = \\ &= A \int_{R_N^+} (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[\varphi](-v) j_\gamma(u', v') e^{-i\langle u'', v'' \rangle} v^\gamma dv. \end{aligned}$$

При дробном  $\gamma_i$  функция  $v_i^{\gamma_i}$  — многозначная функция действительного переменного, и упрощая ситуацию, мы можем взять одну из ветвей этой функции, полагая  $v^\gamma = [v^2]^{\frac{\gamma}{2}}$ . Тогда имеем

$$F_B \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B^{-1}[\varphi](v) \right] = A \int_{R_N^+} (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[\varphi](v) j_\gamma(u', -v') e^{i\langle u'', v'' \rangle} v^\gamma dv.$$

Учитывая, что функция  $j_\gamma(u', v')$  — четная по каждой из весовых переменных  $v_1, \dots, v_k$  и  $v_{n+1}, \dots, v_{n+m}$ , получаем

$$F_B \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B^{-1}[\varphi](v) \right] = F_B^{-1} \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[\varphi](v) \right].$$



Следовательно, продолжая равенство (2), запишем

$$(I_{\gamma,r}f, \varphi)_\gamma = \left( f, F_B^{-1} \left[ (1 + |v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[\varphi](v) \right] \right)_\gamma = \int_{R_N^+} f(u) u^\gamma du \int_{R_N^+} T_u^v G_\gamma^r(v) \varphi(v) v^\gamma dv. \quad (3)$$

Теперь учтем, что ядро  $G_\gamma^r$  является абсолютно интегрируемой функцией (см. [4]). Поэтому его свертка с основной функцией является снова основной функцией. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Фубини о перестановке пределов интегрирования. В результате

$$(I_{\gamma,r}f, \varphi)_\gamma = \int_{R_N^+} \varphi(v) v^\gamma dv \int_{R_N^+} f(u) (T^v G_\gamma^r)(u) u^\gamma du.$$

Но это и есть равенство (1). ■

С помощью операции В-лиувиллевого типа можно расширить понятие смешанной обобщенной свертки.

**Определение 1.** Функция  $\mu(u)$  называется *FB-мультипликатором* в  $L_p^\gamma(R_N^+)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , если она измерима, четная по каждой из переменных  $u_1, \dots, u_k$  и  $u_{n+1}, \dots, u_{n+m}$ , и для любой функции  $\varphi(u) \in S_{ev}(R_N^+)$  выполняется неравенства

$$\|F_B^{-1}[\mu\varphi]\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} \leq c_p \|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)}.$$

**Определение 2.** Функция  $f \in S'_{ev}(R_N^+)$  называется *регулярной* в смысле  $L_p^\gamma(R_N^+)$ , если для некоторого  $\rho_0 > 0$  имеет место равенство

$$I_{\gamma,\rho_0}f = F \in L_p^\gamma(R_N^+). \quad (4)$$

Пусть  $\mu$  – FB-мультипликатор в  $L_p^\gamma(R_N^+)$  и  $F_B[\mu] \in L_1^\gamma(R_N^+)$ , а  $f$  – регулярная в смысле  $L_p^\gamma$  функция, для которой выполняется равенство (4). Для  $\rho \geq \rho_0$  справедливо равенство

$$(\hat{\mu} * f)_\gamma = I_{\gamma,-\rho}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma. \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\hat{\mu} * f)_\gamma &= F_B^{-1} [F_B[(\hat{\mu} * f)_\gamma]] = F_B^{-1} [F_B[\hat{\mu}] \cdot F_B[f]] = \\ &= F_B^{-1} \left[ F_B[\hat{\mu}] \cdot \frac{(1 + |v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}}{(1 + |v|^2)^{-\frac{\rho_0}{2}}} F_B[f] \right] = F_B^{-1} [F_B[\hat{\mu}] \cdot (1 + |v|^2)^{\frac{\rho}{2}} F_B[I_{\gamma,\rho}f]] = \\ &= F_B^{-1} \left[ (1 + |v|^2)^{\frac{\rho}{2}} F_B(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f) \right] = I_{\gamma,-\rho}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma. \end{aligned}$$

**Теорема.** Пусть  $\mu \in L_1^\gamma(R_N^+)$  – FB-мультипликатор и  $\hat{\mu} = F_B^{-1}[\mu]$ . Для регулярной в смысле  $L_p^\gamma(R_N^+)$  весовой обобщенной функции  $f \in S'_{ev}$  при любых значениях  $\rho'$  имеет место равенство

$$I_{\gamma,-\rho'}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho'}f)_\gamma = (\hat{\mu} * f)_\gamma. \quad (6)$$



□ По определению (4) для  $f \in S'_{ev}(R_N^+)$  существует  $\rho > 0$  такое, что  $I_{\gamma,\rho}f \in L_p^\gamma(R_N^+)$ . Пусть  $\rho' \geq \rho$ , тогда при  $\rho' - \rho = r$  получаем

$$\begin{aligned} I_{\gamma,-\rho'}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho'}f)_\gamma &= I_{\gamma,-(\rho+r)}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho+r}f)_\gamma = I_{\gamma,-\rho}I_{\gamma,-r}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}I_{\gamma,r}f)_\gamma = \\ &= I_{\gamma,-\rho}I_{\gamma,-r}F_B^{-1} \left[ F_B \left[ (\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}I_{\gamma,r}f)_\gamma \right] \right] = \\ &= I_{\gamma,-\rho}I_{\gamma,-r}F_B^{-1} \left[ \mu(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[f] \right] = \\ &= I_{\gamma,-\rho}F_B^{-1} \left[ (1+|v|^2)^{\frac{r}{2}}\mu(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[f] \right] = \\ &= I_{\gamma,-\rho}F_B^{-1} [\mu \cdot F_B [I_{\gamma,\rho}f]] = I_{\gamma,-\rho}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma . \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (5), имеем

$$I_{\gamma,-\rho'}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho'}f)_\gamma = I_{\gamma,-\rho}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma = (\hat{\mu} * f)_\gamma .$$

Пусть теперь  $\rho' < \rho$  и положим  $\rho = \rho' + q$ , ( $q > 0$ ). Значит функция  $I_{\gamma,\rho'}f$  регулярна в смысле  $L_p^\gamma$ , тогда  $I_{\gamma,q}I_{\gamma,\rho'}f \in L_p^\gamma(R_N^+)$ . Поэтому, используя равенство (5) для  $q > 0$  и полугрупповое свойство операции В-лиувилевского типа  $I_{\gamma,r}$ , имеем

$$I_{\gamma,-\rho'}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho'}f)_\gamma = I_{\gamma,-\rho'}I_{\gamma,-q}(\hat{\mu} * I_{\gamma,q}I_{\gamma,\rho'}f)_\gamma = I_{\gamma,-\rho}(\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma = (\hat{\mu} * f)_\gamma .$$

Тем самым получено утверждение (6). ■

Из равенства (6) следует, что для регулярных в смысле  $L_p^\gamma$  функций  $f$  и любого действительного числа  $r$  имеет место равенство

$$I_{\gamma,r}(\hat{\mu} * f)_\gamma = I_{\gamma,r}I_{\gamma,-r}(\hat{\mu} * I_{\gamma,r}f)_\gamma = (\hat{\mu} * I_{\gamma,r}f)_\gamma . \quad (7)$$

Таким образом, к регулярной в смысле  $L_p^\gamma(R_N^+)$  функции  $f$  операцию  $I_{\gamma,r}$  можно применить под знаком обобщенной свертки.

Кроме того, если  $\mu$  – ФВ-мультипликатор,  $f$  регулярная в смысле  $L_p^\gamma$  функция, из (7) следует, что обобщенная свертка  $\hat{\mu} * f$  – регулярная в смысле  $L_p^\gamma(R_N^+)$  функция. Действительно, для  $I_{\gamma,r}f \in L_p^\gamma(R_N^+)$  имеет место равенство (7). Причем  $\hat{\mu} * I_{\gamma,r}f \in L_p^\gamma(R_N^+)$ , тогда  $I_{\gamma,r}(\hat{\mu} * f)_\gamma \in L_p^\gamma(R_N^+)$ . Отсюда по определению 2 следует, что  $(\hat{\mu} * f)_\gamma$  регулярная в смысле  $L_p^\gamma(R_N^+)$  функция.

Для  $\mu$  и  $\lambda$  – ФВ-мультипликаторов и  $f \in L_p^\gamma(R_N^+)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) в терминах обобщенных свертки имеем

$$\left( \hat{\lambda} * (\hat{\mu} * f)_\gamma \right)_\gamma = \left( \hat{\mu} * (\hat{\lambda} * f)_\gamma \right)_\gamma = \left( \hat{\lambda}\mu * f \right)_\gamma . \quad (8)$$

Кроме того, из (8) следует, что если  $\mu$  и  $\lambda$  – ФВ-мультипликаторы, то  $(\lambda\mu)$  тоже ФВ-мультипликатор. Пусть  $f$  – регулярная в смысле  $L_p^\gamma$  весовая обобщенная функция,  $I_{\gamma,\rho}f \in L_p^\gamma(R_N^+)$  ( $\rho > 0$ ). Тогда равенства (8) будут выполняться, если в них вместо  $f$  подставить  $I_{\gamma,\rho}f$

$$\left( \hat{\lambda} * (\hat{\mu} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma \right)_\gamma = \left( \hat{\mu} * (\hat{\lambda} * I_{\gamma,\rho}f)_\gamma \right)_\gamma = \left( \hat{\lambda}\mu * I_{\gamma,\rho}f \right)_\gamma .$$

Применяя равенство (7), имеем

$$I_{\gamma,\rho} \left( \hat{\lambda} * (\hat{\mu} * f)_\gamma \right)_\gamma = I_{\gamma,\rho} \left( \hat{\mu} * (\hat{\lambda} * f)_\gamma \right)_\gamma = I_{\gamma,\rho} \left( \hat{\lambda}\mu * f \right)_\gamma .$$



Тогда равны между собой функции, стоящие под знаком  $I_{\gamma,\rho}$ , откуда следует, что (8) имеет место для любой регулярной в смысле  $L_r^\gamma$  весовой обобщенной функции.

### Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / М.:Наука, 1977. – 436 с.
2. Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами // Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.
3. Ляхов Л.Н. Описание пространств В-потенциалов Бесселя В-гиперсингулярными интегралами // Условно-корректные задачи математической физики и анализа: Тез. докл. научн. конф., Новосибирск, 1-5 июня 1992г./ ИМ СО РАН. – Новосибирск, 1992. – С.202-203.
4. Половинкина М.В. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию весовых функциональных классов дробной гладкости / Автореферат диссертации к.ф.-м.н. / Воронеж, 2009. – 16 с.
5. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997. – 200 с.

### Operation B-Liouville type

A.A. Feoktistova

Lipetsk State Pedagogical University,  
Lenina St., 42, Lipetsk, 398050, Russia, e-mail: [alek-feoktistova@yandex.ru](mailto:alek-feoktistova@yandex.ru)

**Abstract.** The operation of B-Liouville type generated by the weighted Bessel-Macdonald kernel is introduced. The concept of regular generalized weigh function is proposed using the operation of B-Liouville type and representation of B-Liouville operations in the form of mixed generalized convolution with a weight of Bessel-Macdonald kernel.

**Key words:** Fourier-Bessel's transformation, Bessel-Macdonald's kernel, operation of B-Liouville type.



УДК 517.987

## ПЕРКОЛЯЦИЯ БЕРНУЛЛИЕВСКОГО ОДНОРОДНОГО ПОЛЯ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ <sup>21)</sup>

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308000, Россия, e-mail: [virch@bsu.edu.com](mailto:virch@bsu.edu.com)

**Аннотация.** Доказано, что однородное бернуллиевское поле на бесконечномерной решетке  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  обладает перколяцией с вероятностью единица при неравной нулю концентрации.

**Ключевые слова:** бесконечномерная решетка, однородное случайное бернуллиевское поле, перколяция.

Будем рассматривать множество

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \{x = \langle n_k; k \in \mathbb{N} : n_j \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N} \rangle\}$$

с элементами, которые мы будем далее называть узлами, и случайное однородное бернуллиевское поле  $\langle \tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rangle$ , то есть областью значений случайной функции  $\tilde{c}$  является  $\{0, 1\}$  и все случайные величины  $\tilde{c}(x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  статистически независимы в совокупности. При этом распределение вероятностей определяется одним параметром

$$c = \Pr\{\tilde{c}(x) = 1\}, \quad x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}.$$

Такое распределение вероятностей приводит к тому, что для любого множества  $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  и любой функции  $\theta : A \mapsto \{0, 1\}$  имеет место

$$\Pr\{\tilde{c}(x) = \theta(x); x \in A\} = c^{|A_+|}(1 - c)^{|A_-|}, \quad (1)$$

где  $A_+ = \{x : \theta(x) = 1\}$ ,  $A_- = \{x : \theta(x) = 0\}$ ,  $A = A_+ \cup A_-$ .

Вводя на  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  отношение смежности  $\varphi$  для пар узлов  $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ,  $x = \langle n_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ ,  $y = \langle m_k; k \in \mathbb{N} \rangle$  по формуле

$$x\varphi y \iff \exists \left( l \in \mathbb{Z} : m_l = n_l = \pm 1 \vee \left[ \forall (k \neq l : m_k = n_k) \right] \right),$$

мы превращаем  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  в бесконечномерный неориентированный граф (без петель и кратных ребер), который мы будем обозначать тем же символом и называть *бесконечномерной решеткой*.

Отношение смежности позволяет ввести пути на  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  (конечные или бесконечные). Конечный путь  $\gamma(x, y)$  длины  $n$  – это последовательность  $\langle x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y \rangle$ , для которой  $x_i\varphi x_{i+1}$ ,  $i = 0 \div n - 1$ . Соответственно бесконечный путь  $\gamma(x)$  с начальным узлом  $x$  – это бесконечная последовательность  $\gamma(x) = \langle x_0 = x, x_1, x_2, \dots \rangle$ , для которой  $x_i\varphi x_{i+1}$ ,  $i \in \mathbb{N}_+$ . Путь называется *несамопересекающимся*, если для любых допустимых номеров  $k$  и  $l$  имеет место  $x_k \neq x_l$ . Класс всех конечных *несамопересекающихся* путей длины  $n$  обозначим посредством  $\Gamma_n$  и, соответственно,  $\Gamma$  – класс всех бесконечных *несамопересекающихся* путей.

<sup>21</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545



Понятие перколяции формулируется естественным образом в терминах случайного множества, с которым связано взаимно однозначным образом каждое дихотомическое случайное поле  $\langle \tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rangle$ , а именно, такое поле определяет случайное множество с реализациями  $\{\tilde{W} \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$ , которые строятся по формуле  $\tilde{W} = \{x : \tilde{c}(x) = 1\}$ , и с индуцированным этим полем распределением вероятностей. Для однородного бернуллиевского поля  $\langle \tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rangle$  такое индуцированное распределение вероятностей, согласно (1), определяется формулой

$$\Pr\{A \cap \tilde{W} = A_+\} = c^{|A_+|}(1-c)^{|A_-|}, \quad (2)$$

для любого множества  $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  и любого  $A_+ \subset A$  ( $A_- = A \setminus A_+$ ).

На основе понятия пути вводится отношение связности на случайной реализации  $\tilde{W}$ , которое является отношением эквивалентности. Это отношение позволяет разложить каждую реализацию на дизъюнктивное семейство связных компонент (кластеров) так, что для каждой вершины  $x \in \tilde{W}$  существует единственная содержащая ее связная компонента  $\tilde{W}(x)$ .

В конечномерном случае понятие перколяции случайного множества  $\{\tilde{W} \subset \mathbb{Z}^d\}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  вводится требованием положительности вероятности

$$Q(c) = \Pr\{|\tilde{W}(x)| = \infty\} > 0. \quad (3)$$

Оно эквивалентно утверждению о том, что

$$\Pr\{\exists(\gamma(x) \subset \tilde{W} : \gamma(x) \in \Gamma)\} = Q(c) > 0.$$

В бесконечномерном случае мы будем исходить из определения перколяции, которое состоит в требовании положительности вероятности

$$P(c) \equiv \Pr\{\text{diam}(\tilde{W}(x)) = \infty\} > 0 \quad (4)$$

и которое является, очевидным образом, более сильным по сравнению с тем, которое получается простым распространением формулы (3) на бесконечномерный случай.

Расстоянием между двумя узлами  $x = \langle n_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ ,  $y = \langle m_k; k \in \mathbb{N} \rangle$  назовем число

$$\text{dist}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |n_k - m_k|.$$

Расстояние между узлом  $x$  и множеством  $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  определим как минимальное из расстояний между всеми узлами  $y \in A$  и узлом  $x$ ,

$$\text{dist}(x, A) = \min\{\text{dist}(x, y); y \in A\}.$$

Для любого кластера  $W$  множество

$$\partial W = \{y \in \mathbb{C}W : \exists(z \in W : y\varphi z)\}$$

назовем границей этого кластера. Легко устанавливается, что, в терминах границ кластеров, рассматриваемое нами определение (4) перколяции на  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  переформулируется следующим образом:

$$\Pr\{\text{dist}(x, \partial W(x)) = \infty\} = P(c) > 0. \quad (5)$$



Настоящее сообщение посвящено доказательству, для случая бернуллиевского поля на бесконечномерной решетке, утверждения, которое содержательно звучит как: «в бесконечномерной перколяционной системе порог перколяции равен нулю», и в таком виде оно присутствует в фольклоре среди специалистов по статистической физике. Мы докажем следующую теорему.

**Теорема.** *Условная вероятность*

$$R = \Pr\{\text{diam}(\tilde{W}(x)) = \infty \mid \tilde{c}(x) = 1\}$$

равна единице.

Тогда следствием этого утверждения является формула

$$P(c) = c.$$

Доказательство теоремы основано на двух фактах. Один из них отражает структуру смежности бесконечномерной решетки, а именно, для любого узла  $y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  имеет место  $|\partial\{y\}| = \infty$ . Второй факт является следствием следующего утверждения.

**Лемма.** Пусть  $A$  – произвольное бесконечное множество узлов из  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  и имеется произвольная функция  $\theta : A \mapsto \{1, 0\}$ . Тогда для однородного бернуллиевского поля  $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$ ,  $\Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c$  с  $0 < c < 1$ , имеет место

$$\Pr\{\tilde{c}(x) = \theta(x); x \in A\} = 0.$$

□ Определим множества

$$A_+ = \{x \in A : \theta(x) = 1\}, \quad A_- = \{x \in A : \theta(x) = 0\}.$$

По крайней мере, одно из них, бесконечномерно. Тогда, согласно определению однородного бернуллиевского поля,

$$\Pr\{\tilde{c}(x) = \theta(x)\} = c^{|A_+|}(1 - c)^{|A_-|} = 0. \blacksquare$$

**Следствие.** Пусть  $|A| = \infty$ . Тогда  $\Pr\{A \subset \tilde{W}\} = 0$ .

**Доказательство теоремы.** Но ограничивая общности, далее рассматриваем только кластер  $\tilde{W}(0) \equiv \tilde{W}$ . Требуется доказать, что  $\Pr\{\text{diam}(\tilde{W}) < \infty\} = 0$ .

1. Для кластера  $\tilde{W}$  обозначим  $d(\tilde{W}) = \max\{\text{dist}(0, y); y \in \tilde{W}\}$ . Из неравенства треугольника  $\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, 0) + \text{dist}(0, y)$  следует, что  $d(\tilde{W}) \leq \text{diam}(\tilde{W}) \leq 2d(\tilde{W})$ . Поэтому условие  $\text{diam}(\tilde{W}) < \infty$  эквивалентно  $d(\tilde{W}) < \infty$ , то есть  $\Pr\{\text{diam}(\tilde{W}) < \infty\} = \Pr\{d(\tilde{W}) < \infty\}$ . Представив в виде дизъюнктивного объединения

$$\{d(\tilde{W}) < \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{d(\tilde{W}) = n\},$$

получим

$$\Pr\{d(\tilde{W}) < \infty\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{d(\tilde{W}) = n\}.$$



Поэтому достаточно доказать, что  $\Pr\{d(\tilde{W}) = n\} = 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}_+$ .

2. Пусть  $F_n$  – множество узлов, находящихся на расстоянии  $n$  от нуля.  $\text{Card}(F_n) = \aleph_0$ , так как счетно множество всех конечных путей из  $\bigcup_n \Gamma_n$  с началом в нулевом узле. Тогда разложим

$$\{d(\tilde{W}) = n\} = \bigcup_{z \in F_n} \{\tilde{W} \ni z; \tilde{c}(y) = 0, y \in (\partial\{z\} \cap F_{n+1})\}.$$

Следовательно,

$$\Pr\{d(\tilde{W}) = n\} \leq \sum_{z \in F_n} \Pr\{\tilde{W} \ni z; \tilde{c}(y) = 0, y \in (\partial\{z\} \cap F_{n+1})\} \quad (6)$$

и поэтому достаточно доказать, что равно нулю каждое из слагаемых этой суммы.

3. Выберем произвольный узел  $z = \langle l_k : k \in \mathbb{N} \rangle \in F_n \cap \tilde{W}$ . При этом  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |l_k| = n$ . Для того чтобы узел  $u$  обладал свойствами  $z\varphi u$  и  $\text{dist}(0, u) = n + 1$ , необходимо и достаточно чтобы его координаты  $u = \langle m_k : k \in \mathbb{N} \rangle$  удовлетворяли соотношениям  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |m_k - l_k| = 1$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |m_k| = n + 1$ . Выполнив замену  $n_k = m_k - l_k$ , эти условия на координаты запишем в виде  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |n_k| = 1$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |l_k + n_k| = n + 1$ . Откуда имеем бесконечно множество решений  $n_k = \pm \delta_{kj}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  и для каждого конкретного  $j \in \mathbb{N}$  должно выполняться

$$\sum_{k \in \mathbb{N}: k \neq j} |l_k| + |l_j \pm 1| = n + 1.$$

В результате, имеем  $|l_j \pm 1| - |l_j| = 1$  и, следовательно, имеем тождество, если знак выбран в соответствии со знаком  $l_j$ . В результате,  $\text{Card}(\partial\{z\} \cap F_{n+1}) = \aleph_0$  при  $z \in F_n$ .

4. Так как  $\Pr\{\tilde{W} \ni z; \tilde{c}(y) = 0, y \in (\partial\{z\} \cap F_{n+1})\} \leq \Pr\{\tilde{c}(y) = 0, y \in (\partial\{z\} \cap F_{n+1})\}$ , то положив  $A = \partial\{z\} \cap F_{n+1}$ , на основании утверждения леммы, получаем требуемое равенство нулю каждого из слагаемых в (6). ■

### Литература

1. Кестен Х. Теория просачивания для математиков / Москва: Мир, 1986. – 390 с.

### PERCOLATION PROPERTY OF UNIFORM BERNOULLI FIELD ON INFINITE DIMENSIONAL LATTICE

Yu.P. Virchenko

**Abstract.** It is proved that uniform Bernoulli random field on infinite dimensional lattice possesses the percolation property with probability one.

**Key words:** infinite dimensional lattice, random Bernoulli field, percolation.